

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Олимпиада по математике 2016 года

(физические факультеты, первый курс)

Задача 1. Пусть $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^n$ – все решения системы $\begin{cases} y = \cos x; \\ x = 100 \cos 100y. \end{cases}$ Найдите отношение $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$.

Задача 2. Функция $f(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x \cdot \sin(\sqrt[3]{x})}$ теряет смысл при $x = 0$.

Доопределите, если это возможно, функцию, чтобы она стала непрерывной в нуле. Если это невозможно, то объясните почему.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального n , отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Задача 4. Найдите все возможные наборы из трех попарно различных целых чисел, обладающих следующим свойством: если выбрать одно из этих чисел и прибавить к нему сумму кубов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа.

Задача 5. Дана система из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, все коэффициенты которой отличны от нуля. При решении этой системы по формулам Крамера $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ оказалось, что как основной определитель Δ , так и все дополнительные определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ равны нулю. Для каждого натурального n , отличного от единицы, ответьте на вопрос: «Верно ли, что данная система уравнений обязательно имеет бесконечно много решений?».

Задача 6. Решите уравнение $(5 - x - x^2)^2 + 3(5 - x - x^2) - 5 = x$.

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Олимпиада по математике 2016 года

(физические факультеты, старшие курсы)

Задача 1. Найдите площадь области, ограниченной в декартовой системе координат линией $(x - y)^2 + x^2 = 1$.

Задача 2. Исследуйте на сходимости числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{1! + 2! + \dots + n!}$, где $(2n)!!$ – это произведение всех четных натуральных чисел, не превосходящих $(2n)$.

Задача 3. Докажите, что формула $\int \cos^a x \, dx = \frac{\sin x \cos^{a-1} x}{a} + \frac{a-1}{a} \int \cos^{a-2} x \, dx$ верна для любого $a \neq 0$. С помощью этой формулы вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 x \, dx$.

Задача 4. Решите задачу Коши: $3(x^2 - 1)y^2 y' + xy^3 = x^3 + x^2 - x - 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Задача 5. Докажите, что для любого натурального n , отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Задача 6. Вычислите $\oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, где $X = a_1x + b_1y$, $Y = a_2x + b_2y$, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$,

C – простой замкнутый контур, окружающий начало координат (положительно ориентированный).

Национальный исследовательский Томский государственный университет

Олимпиада по математике 2016 года

(естественнонаучные факультеты)

Задача 1. Решите уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$ в натуральных числах.

Задача 2. Рассмотрим отрезок AB . Последовательность точек $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ строится следующим образом: $M_1 = A$, $M_2 = B$, M_{n+1} – середина отрезка, соединяющего точки M_{n-1} и M_n . К какой точке отрезка AB стремится последовательность $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Задача 3. Постройте график функции $y = x + [x]$ при $0 \leq x \leq 5$, где $[x]$ – это целая часть числа x .

Задача 4. Какой из двух следующих пределов существует, а какой нет: а) предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n)$; б) предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$? Ответ обоснуйте.

Задача 5. Вычислите значение выражения $\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$, где $x = \rho \cos \varphi$,
 $y = \rho \sin \varphi$, $\rho > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Задача 6. Существуют ли три различных иррациональных числа, сумма и произведение которых являются целыми?

Решения.

Физические факультеты. Первый курс.

Задача 1. Пусть $\{(x_k; y_k)\}_{k=1}^n$ – все решения системы $\begin{cases} y = \cos x; \\ x = 100 \cos 100y. \end{cases}$ Найдите отношение $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}$.

Решение. Сделаем замену $z = 100y$. Тогда исходная система примет вид $\begin{cases} z = 100 \cos x; \\ x = 100 \cos z. \end{cases}$ Очевидно, что если пара $(a; b)$ – решение последней системы, то пара $(b; a)$ – тоже ее решение. Тогда $x_1 + x_2 + \dots + x_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n = 100(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$, откуда искомое отношение равно 100.

Задача 2. Функция $f(x) = \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x \cdot \sin(\sqrt[3]{x})}$ теряет смысл при $x = 0$.

Доопределите, если это возможно, функцию, чтобы она стала непрерывной в нуле. Если это невозможно, то объясните почему.

Решение. Вычислим $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x)$. Воспользуемся эквивалентностью при $x \rightarrow 0$:

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \sim \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(1 + \frac{1-x}{1+x} - 1\right) \sim \sqrt{x^{2/3}} \sqrt{1+x^{1/3}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} - 1\right) \sim |x|^{1/3} (-2x).$$

Тогда имеем равенства $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x \cdot \sin(\sqrt[3]{x})} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{-2x |x|^{1/3}}{x \cdot x^{1/3}} = -2 \lim_{x \rightarrow \pm 0} \left(\frac{|x|}{x}\right)^{1/3}$. Поэтому $f(0-0) = +2, f(0+0) = -2$. Предела в нуле не существует, а значит, доопределить по непрерывности в нуле нельзя.

Задача 3. Докажите, что для любого натурального n , отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Решение. Числа $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = \sqrt[n]{2}, a_n = (1-n)\sqrt[n]{2}$ удовлетворяют условию задачи. Число $\sqrt[n]{2}$ иррационально, т.к. иначе получаем: $\sqrt[n]{2} = \frac{k}{m}, k, m$ – натуральные, $\frac{k}{m}$ – несократимая дробь, но $2 = \frac{k^n}{m^n}, k^n = 2m^n$ – четное, значит, $k^n = (2l)^n = 2m^n, m^n = 2^{n-1}l^n$, т.е. число m тоже четное, дробь $\frac{k}{m}$ можно сократить.

Задача 4. Найдите все возможные наборы из трех попарно различных целых чисел, обладающих следующим свойством: если выбрать одно из этих чисел и прибавить к нему

сумму кубов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа.

Решение. Числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b^3 + c^3 = a^3 + b + c^3 = a^3 + b^3 + c$. Вычтя из всех частей равенства выражение $a^3 + b^3 + c^3$, получим $a - a^3 = b - b^3 = c - c^3$, т.е. a, b, c – это попарно различные решения уравнения $f(x) = y_0$, где $f(x) = x - x^3$. С помощью производной $f'(x) = 1 - 3x^2$ мы видим, что область определения функции разбивается

точками экстремумов $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ на три промежутка монотонности, каждому из которых

принадлежит ровно один из трех различных корней уравнения $f(x) = y_0$. Значит, считая,

что $a \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, имеем $y_0 = f(a) \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}; \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$, а так как y_0 целое, то $y_0 = 0$. Из

уравнения $f(x) = 0$ находим, что $a = 0, b = -1, c = 1$. Остальные решения являются перестановкой данного решения.

Можно решать задачу также и аналитически. Учитывая, что $a \neq b$, выразим из равенства $a - a^3 = b - b^3$ одну переменную через другую: $a = \frac{-b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2}$. Видно, что

$0 \leq 4 - 3b^2 \leq 4$, а значит, так как a и b – целые, то $4 - 3b^2 = 1$ или $4 - 3b^2 = 4$. Отсюда $b = \pm 1$ или $b = 0$, что соответствует набору чисел $0; -1; 1$.

Задача 5. Дана система из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, все коэффициенты которой отличны от нуля. При решении этой системы по формулам

Крамера $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ оказалось, что как основной определитель Δ , так и все дополнительные

определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ равны нулю. Для каждого натурального n , отличного от единицы, ответьте на вопрос: «Верно ли, что данная система уравнений обязательно имеет бесконечно много решений?».

Решение. Если $n \geq 3$, то ответ отрицательный. Действительно, система уравнений

вида
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2, \\ \dots \end{cases}$$
 не имеет решений, так как первое и третье уравнения

несовместны, но, с другой стороны, первые две строки в любом из определителей $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ одинаковы, а значит, эти определители равны нулю.

Если же $n = 2$, то ответ положителен, так как из равенства нулю определителей следует пропорциональность их строк, причем коэффициент пропорциональности для всех определителей один и тот же. Значит, уравнения линейно зависимы, и система имеет бесконечно много решений.

Задача 6. Решите уравнение $(5 - x - x^2)^2 + 3(5 - x - x^2) - 5 = x$.

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + 3x - 5$ и $g(x) = 5 - x - x^2$. Тогда $\begin{cases} f(y) = x, \\ g(x) = y, \end{cases}$ т.е.

$\begin{cases} 5 - x - x^2 = y, \\ y^2 + 3y - 5 = x. \end{cases}$ Складывая эти уравнения почленно, получим $y^2 - x^2 + 3y - x = x + y$,

откуда следует $(y-x)(y+x+2)=0$. Если $y=x$, то $x^2+2x-5=0$ и $x_{1,2}=-1\pm\sqrt{6}$; если же $y=-x-2$, то $5-x-x^2=-x-2$, откуда $x^2=7$ и $x_{3,4}=\pm\sqrt{7}$.

Решения.

Физические факультеты. Старшие курсы.

Задача 1. Найдите площадь области, ограниченной линией $(x-y)^2+x^2=1$.

Решение. Сделаем замену $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi$, где $\rho\geq 0$ и $0\leq\varphi<2\pi$. Уравнение границы $(x-y)^2+x^2=1$ в новой системе координат имеет вид $\rho=1$. Якобиан перехода равен $J=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \cos\varphi+\sin\varphi & -\rho\sin\varphi+\rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho$. Следовательно, площадь искомой области равна $S=\iint_D dx dy=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho=\pi$.

Ответ: π .

Задача 2. Исследуйте на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{1!+2!+\dots+n!}$, где $(2n)!!$ – это произведение всех четных натуральных чисел, не превосходящих $(2n)$.

Решение. Так как $1!+2!+\dots+n!<n\cdot n!$, то $a_n=\frac{(2n)!!}{1!+2!+\dots+n!}>\frac{(2n)!!}{n\cdot n!}=b_n$. К ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ применим признак Даламбера: $\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\rightarrow+\infty} \frac{(2n+2)n}{(n+1)^2}=2$. Из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ по признаку сравнения следует расходимость исходного ряда.

Задача 3. Докажите, что формула $\int \cos^a x dx = \frac{\sin x \cos^{a-1} x}{a} + \frac{a-1}{a} \int \cos^{a-2} x dx$ верна для любого $a \neq 0$. С помощью этой формулы вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 x dx$.

Решение. Продифференцируем и затем преобразуем правую часть формулы: $\left(\frac{\sin x \cos^{a-1} x}{a} + \frac{a-1}{a} \int \cos^{a-2} x dx\right)' = \frac{\cos^a x - (a-1) \cos^{a-2} x \sin^2 x + (a-1) \cos^{a-2} x}{a} = \cos^a x$, что совпадает с производной от левой части.

$$\begin{aligned} \text{Найдем интеграл } \int \cos^8 x dx &= \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8} \int \cos^6 x dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \\ &+ \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \int \cos^4 x dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7 \sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35}{48} \cdot \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{35}{48} \cdot \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \\ &+ \frac{7 \sin x \cos^5 x}{48} + \frac{35 \sin x \cos^3 x}{192} + \frac{35}{64} \cdot \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{35}{64} \cdot \frac{1}{2} \int dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7 \sin x \cos^5 x}{48} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{35 \sin x \cos^3 x}{192} + \frac{35 \sin x \cos x}{128} + \frac{35x}{128} + c.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^8 x dx = \frac{1}{8 \cdot 2^4} + \frac{7}{48 \cdot 2^3} + \frac{35}{192 \cdot 2^2} + \frac{35}{128 \cdot 2} + \frac{35\pi}{128 \cdot 4} = \frac{6+14+35+105}{3 \cdot 2^8} + \frac{35\pi}{512} = \frac{5}{24} + \frac{35\pi}{512}.$$

Ответ: $\frac{5}{24} + \frac{35\pi}{512}.$

Задача 4. Решите задачу Коши: $3(x^2 - 1)y^2 y' + xy^3 = x^3 + x^2 - x - 1, y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

Решение. Сначала запишем уравнение в виде $(y^3)' + \frac{x}{x^2 - 1} y^3 = x + 1.$ Выполним замену

$y^3 = z, z = z(x),$ получим уравнение $z' + \frac{x}{x^2 - 1} z = x + 1.$ Находим решение методом

вариации постоянной: $z' + \frac{x}{x^2 - 1} z = 0, \quad \int \frac{dz}{z} = -\int \frac{x dx}{x^2 - 1}, \quad \ln |z| = -\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + c,$

$z = \frac{C}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$ Учитывая, что в начальном условии $x_0 = \frac{1}{2},$ выбираем интервал $|x| < 1,$ то

есть $|x^2 - 1| = 1 - x^2.$ После вариации постоянной $C = C(x)$ получаем: $\frac{C'(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = x + 1,$

откуда $C(x) = \int (x + 1)\sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(1 - x^2)^3} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$

Итак, общее решение имеет вид $y^3 = -\frac{1}{3}(1 - x^2) + \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1 - x^2}} + \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}}.$ Найдем константу $C,$ учитывая начальное условие $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0: C = -\frac{\pi}{12}.$ Окончательно имеем

$$y^3 = -\frac{1}{3}(1 - x^2) + \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1 - x^2}} - \frac{\pi}{12\sqrt{1 - x^2}}.$$

Задача 5. Докажите, что для любого натурального $n,$ отличного от единицы, существует n иррациональных чисел, сумма и произведение которых являются целыми.

Решение. Числа $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = \sqrt[n]{2}, \quad a_n = (1 - n)\sqrt[n]{2}$ удовлетворяют условию задачи. Число $\sqrt[n]{2}$ иррационально, т.к. иначе получаем: $\sqrt[n]{2} = \frac{k}{m}, k, m - \text{натуральные}, \frac{k}{m} -$

несократимая дробь, но $2 = \frac{k^n}{m^n}, k^n = 2m^n - \text{четное, значит, } k^n = (2l)^n = 2m^n, m^n = 2^{n-1}l^n,$

т.е. число m тоже четное, дробь $\frac{k}{m}$ можно сократить.

Задача 6. Вычислить $\oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2},$ где $X = a_1x + b_1y, \quad Y = a_2x + b_2y, a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, C -$ простой замкнутый контур, окружающий начало координат.

Решение. Обозначим через D область, ограниченную простым контуром C .

Зададим отображение $f(x, y) = (X, Y)$, $\begin{cases} X = a_1x + b_1y, \\ Y = a_2x + b_2y. \end{cases}$ Отображение является

непрерывно дифференцируемым (как линейное) и биекцией. При этом область D переходит в некоторую область $\tilde{D} = f(D)$, а край области D переходит в край области $\tilde{D}$. Точка $(0,0)$ переходит в себя. Так как точка $(0,0)$ – внутренняя точка области $\tilde{D}$, то найдётся окружность $\tilde{\Gamma}$ радиуса R с центром в начале координат, целиком лежащая в области $\tilde{D}$.

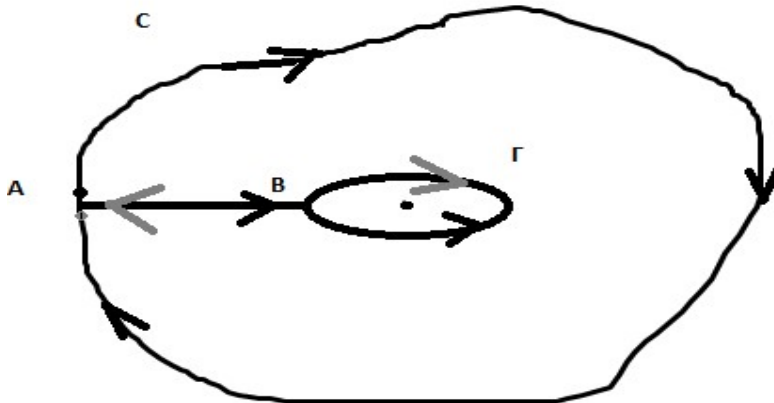
Зададим параметризацию окружности $\tilde{\Gamma}$: $\begin{cases} X = R \cos(t), \\ Y = R \sin(t), \end{cases}$ Так как $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то $t \in [0, 2\pi]$.

переменные x, y однозначно выражаются через X, Y из системы $\begin{cases} X = a_1x + b_1y, \\ Y = a_2x + b_2y. \end{cases}$

Окружность $\tilde{\Gamma}$ при отображении f^{-1} перейдёт в эллипс Γ с параметризацией

$$\begin{cases} x = \frac{R}{\Delta}(b_2 \cos(t) - b_1 \sin(t)), \\ y = \frac{R}{\Delta}(a_1 \sin(t) - a_2 \cos(t)), \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Соединим внешний контур C с внутренним контуром Γ каким-нибудь отрезком AB ; пусть точка A лежит на контуре C .



Тогда $\oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \int_{\Pi} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} + \oint_{\Gamma^+} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, где $C = C^+ \cup AB^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^+ \cup AB^-$,

$\Pi = C^+ \cup AB^+ \cup \Gamma^- \cup AB^-$.

Интеграл $\int_{\Pi} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$ равен нулю по формуле Грина.

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R^2(\cos(t)\cos(t) - \sin(t)(-\sin(t)))dt}{R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Ответ: 2π .

Решения.

Естественнонаучные факультеты.

Задача 1. Решите уравнение $x + y = x^2 - xy + y^2$ в натуральных числах.

Решение. Если $x = y$, то $x = y = 2$. Пусть теперь $x \neq y$. Заметим, что если $(x; y)$ – решение уравнения, то $(y; x)$ – тоже решение, поэтому достаточно найти решения, в которых $y > x$, т.е. $y = x + k$. Подставив в уравнение и преобразовав, мы получим $x^2 + (k - 2)x + k^2 - k = 0$ – квадратное уравнение относительно переменной x . Потребуем, чтобы дискриминант этого уравнения был неотрицателен: $D = 4 - 3k^2 \geq 0$, отсюда $k = 1$. Следовательно, $x = 1$ и $y = 2$.

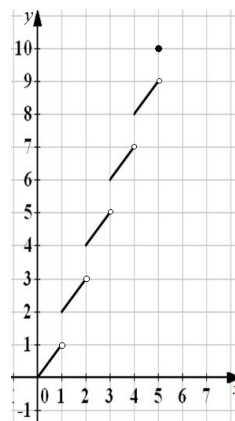
Ответ: (2; 2), (1; 2), (2; 1).

Задача 2. Рассмотрим отрезок AB . Последовательность точек $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ строится следующим образом: $M_1 = A$, $M_2 = B$, M_{n+1} – середина отрезка, соединяющего точки M_{n-1} и M_n . К какой точке отрезка AB стремится последовательность $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Решение. Индукцией по n проверяется, что точка M_n отстоит от точки A на $\frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ длины отрезка AB . Таким образом, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ стремится к точке C отрезка AB , отстоящей от A на $\frac{2}{3} |AB|$.

Задача 3. Постройте график функции $y = x + [x]$ при $0 \leq x \leq 5$, где $[x]$ – это целая часть числа x .

Решение. $y = x + [x] = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ x+1, & 1 \leq x < 2, \\ x+2, & 2 \leq x < 3, \\ x+3, & 3 \leq x < 4, \\ x+4, & 4 \leq x < 5, \\ 10, & x = 5. \end{cases}$



Задача 4. Какой из двух следующих пределов существует, а какой нет: а) предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n)$; б) предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$? Ответ обоснуйте.

Решение. Так как $\sin(\pi n) = 0$ при любом натуральном n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = 0$. Покажем теперь с помощью определения Гейне, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$ не существует. Действительно, если рассмотреть две бесконечно большие последовательности $x_n = n$ и $y_n = 2n + \frac{1}{2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi x_n) = 0$, но $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi y_n) = 1$.

Задача 5. Вычислите значение выражения $\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi}$, где $x = \rho \cos \varphi$,

$$y = \rho \sin \varphi, \rho > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Поскольку $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$. Найдем

все частные производные, входящие в искомое выражение: $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho} = \cos \varphi$,

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}.$$
 Подставив, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Ответ: 1

Задача 6. Существуют ли три различных иррациональных числа, сумма и произведение которых являются целыми?

Решение. Да. Числа $\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$ и $-3\sqrt[3]{2}$ удовлетворяют условию задачи.

Число $\sqrt[3]{2}$ иррационально, т.к. иначе получаем: $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, m, n – натуральные, $\frac{m}{n}$ –

несократимая дробь, но $2 = \frac{m^3}{n^3}$, $m^3 = 2n^3$ – четное, значит, $m^3 = (2k)^3 = 2n^3$, $n^3 = 4k^3$, т.е.

число n тоже четное, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить.