**Национальный исследовательский Томский государственный университет**
**Олимпиада по математике 2019 года**
**(физические факультеты, первый курс)**

**Задача 1.** Докажите тождество $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ для всех $x$, удовлетворяющих условию $|x|<1$. Верно ли это тождество, если $|x|>1$?

**Задача 2.** На плоскости проводятся все возможные окружности, проходящие через фиксированную точку $A$ и касающиеся фиксированной прямой $a$. Определите тип кривой, образованной центрами всех построенных окружностей.

**Задача 3.** Матрица $A$ размера $2\times 2$ с вещественными элементами такова, что $(x, y)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=4x^2+6xy+y^2$ для любых вещественных $x$ и $y$. Найдите наименьшее возможное значение определителя $\left|A^2\right|$.

**Задача 4.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $\frac{5+ax}{x+1}=5+\sqrt{-x-1}$ имеет хотя бы одно решение.

**Задача 5.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n}\right)$.

**Задача 6.** Каждый участник флешмоба «Мы любим измерять» выбирает произвольную точку, лежащую на оси абсцисс, и вычисляет сумму расстояний до точек (1; 1) и (5; 2). Какой наименьший результат мог получиться у участников флешмоба?

**Национальный исследовательский Томский государственный университет**
**Олимпиада по математике 2019 года**
**(физические факультеты, старшие курсы)**

**Задача 1.** Найдите значение суммы $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$ при $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**Задача 2.** Исследуйте на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\sqrt[2019]{2}\right\}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sqrt[2019]{2}\right)^n\right\}$, где символом $\{x\}$ обозначена дробная часть числа $x$.

**Задача 3.** Найдите количество упорядоченных пар действительных чисел ($a$; $b$) таких, что $(a+ib)^{2019} = a - ib$.

**Задача 4.** Иван привез из Новой Зеландии редкого попугая какапо, любимым лакомством которого являются шишки дерева риму. Каждый день Иван приезжает в магазин, где можно купить эти шишки. Там он подбрасывает четыре раза монету и покупает столько шишек, сколько раз выпал герб. При этом, если в магазине окажется меньше шишек, чем выпало гербов, то он купит все имеющиеся шишки.

Продавец заказывает шишки из Новой Зеландии по цене 80 долларов за штуку, а продает – по 272 доллара за штуку. Срок хранения шишек – одни сутки, и Иван единственный их покупатель (т.е. все не купленные Иваном шишки продавцу приходится выбрасывать). Сколько шишек дерева риму следует ежедневно заказывать продавцу, чтобы средний ожидаемый дневной доход от их продажи был наибольшим?

**Задача 5.** Существует ли линейное дифференциальное уравнение вида $p(x)\,y'' + q(x)\,y' + y = 0$ с непрерывными на числовой прямой коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$, обладающее линейно независимыми на всей прямой решениями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ такими, что их вронскиан равен нулю в некоторой точке?

**Задача 6.** Найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{1}{k}}$.

**Национальный исследовательский Томский государственный университет**
**Олимпиада по математике 2019 года**
**(естественнонаучные факультеты)**

**Задача 1.** Докажите тождество $\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}} = \arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}$ для неотрицательных $x$. Верно ли это тождество при отрицательных $x$?

**Задача 2.** На плоскости проводятся все возможные окружности, проходящие через точку (0; 1) и касающиеся прямой $y=0$. Определите тип кривой, образованной центрами всех построенных окружностей.

**Задача 3.** На доске записаны друг за другом 10 квадратных матриц второго порядка, причем произведение любых трех подряд записанных матриц, а также произведение всех десяти матриц равно матрице, на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца которой расположено число $i+j$. Найдите седьмую по порядку матрицу.

**Задача 4.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{24}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$.

**Задача 5.** Для участия в шествии ТГУ декан построил студентов в колонну по 4, но при этом студент Иванов остался лишним. Тогда декан построил студентов в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, декан пообещал его отчислить. После этого в колонне по 7 Иванов нашел себе место, и никого лишнего не осталось. Сколько студентов факультета пришло на шествие, если известно, что на факультете учится менее 500 студентов?

**Задача 6.** Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-10x+29}$.

**Решения.**
**Физические факультеты. Первый курс.**

**Задача 1.** Докажите тождество $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x|<1$. Верно ли это тождество, если $|x|>1$?

**Решение.** ***Первый способ.*** Заметим, что $\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow$ $2|x|<\sqrt{2+2x^2}$ $\Leftrightarrow$ $4x^2<2+2x^2$ $\Leftrightarrow$ $|x|<1$. Поэтому, если $|x|<1$ и $\alpha=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, то $\sin\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, и $-\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

Имеем $-\dfrac{\pi}{2}<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (учли, что в первой и четвертой четвертях косинус положителен), $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{2x}{1-x^2}$. Следовательно, $2\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Если же $|x|>1$, то $\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $|\alpha|>\dfrac{\pi}{4}$. Значит, $|2\alpha|>\dfrac{\pi}{2}$ и $2\alpha\neq\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

***Второй способ.*** Функции $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$ и $g(x)=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ дифференцируемы на интервале $(-1;1)$. Найдём их производные:

$$f'(x)=\left(\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\frac{2\left(1-x^2\right)-2x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{\left(1-x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^2}\frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\left(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=2\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right)=2\sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\frac{2}{1+x^2}.$$

Так как $f'(x)=g'(x)$, то $f(x)=g(x)+C$, т.е. $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. Подставив $x=0$ в полученное тождество, получим $C=0$.

На промежутках $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ также справедливо $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. Подставив $x=-\sqrt{3}$, получим $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+C$, откуда $C=\pi$. Значит, на промежутке $(-\infty;-1)$ выполняется тождество $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\pi$. Аналогично, подставив $x=\sqrt{3}$, получим тождество $\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}=2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\pi$, верное для всех $x\in(1;+\infty)$.

**Задача 2.** На плоскости проводятся все возможные окружности, проходящие через фиксированную точку $A$ и касающиеся фиксированной прямой $a$. Определите тип кривой, образованной центрами всех построенных окружностей.

**Решение.** Введем декартовую систему координат так, чтобы ось $Oy$ совпадала с прямой $a$, а ось $Ox$ проходила через точку $A$. Обозначим через $p$ расстояние от точки $A$ до прямой $a$, а через $\left(x_c; y_c\right)$ и $R$ – центры и радиусы соответственно искомых окружностей. Тогда окружности с уравнением $\left(x-x_c\right)^2+\left(y-y_c\right)^2=R^2$ проходят через точку $A(p; 0)$, а значит, $\left(p-x_c\right)^2+y_c^2=R^2$. Кроме того, они касаются оси $Oy$, а значит, их центры находятся на расстоянии радиуса от прямой $x=0$, т.е. $R=\left|x_c\right|$ или $x_c^2=R^2$. Приравняем левые части полученных равенств: $\left(p-x_c\right)^2+y_c^2=x_c^2$. Откуда $y_c^2=2px_c-p^2$. Значит, искомая кривая является параболой.

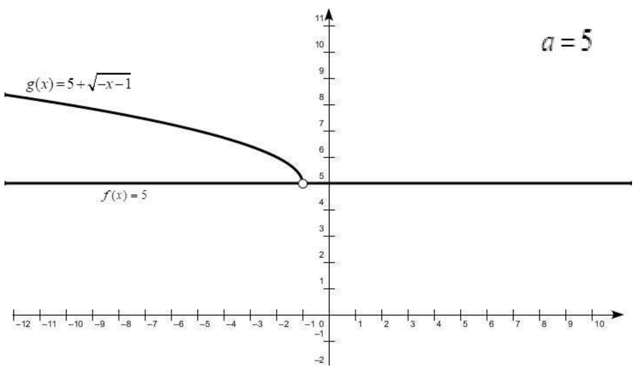
**Задача 3.** Матрица $A$ размера $2\times 2$ с вещественными элементами такова, что $(x, y)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=4x^2+6xy+y^2$ для любых вещественных $x$ и $y$. Найдите наименьшее возможное значение определителя $\left|A^2\right|$.

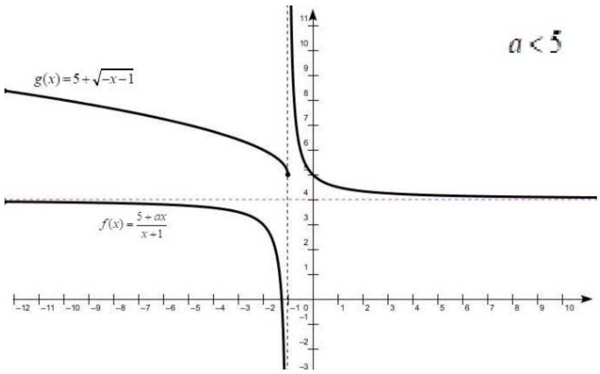
**Ответ:** 0.

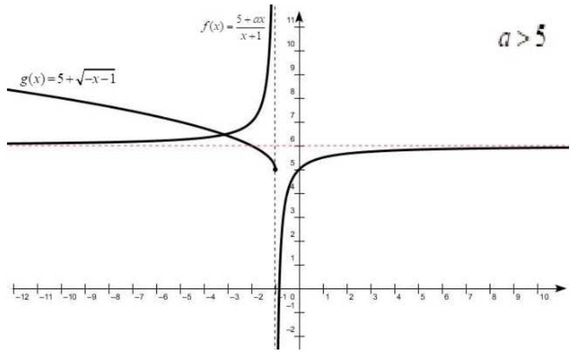
**Решение.** Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда по условию имеем $ax^2+(b+c)xy+dy^2=4x^2+6xy+y^2$. Таким образом, нужно найти наименьшее значение выражения $\left|A^2\right|=\left|A\right|^2=(ad-bc)^2$ при условии, что $a=4$, $b+c=6$, $d=1$. Ясно, что это наименьшее значение неотрицательно. С другой стороны, полагая $b=3+\sqrt{5}$ и $c=3-\sqrt{5}$, получаем $\left|A^2\right|=0$, т. е. искомое наименьшее значение равно 0.

**Задача 4.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\frac{5+ax}{x+1}=5+\sqrt{-x-1}$ имеет хотя бы одно решение.

**Решение.** Рассмотрим функции $f(x)=\frac{5+ax}{x+1}$ и $g(x)=5+\sqrt{-x-1}$. График функции $g(x)$ – это верхняя половина параболы с вершиной $(-1; 5)$ и ветвями, направленными влево. Преобразуем левую часть: $f(x)=\frac{ax+a+5-a}{x+1}=a+\frac{5-a}{x+1}$. Таким образом, если $a=5$, то график $f(x)$ – это прямая $y=5$ с выколотой точкой $(-1; 5)$; если $a\neq 5$, то график $f(x)$ – это гипербола с асимптотами $y=a$ и $x=-1$, причем, при $a<5$ гипербола расположена в первой и третьей четвертях относительно своих асимптот, а при $a>5$ – во второй и четвертой четвертях.






Видно, что данные графики пересекаются только при $a > 5$.

**Задача 5.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n}\right)$.

**Решение.** Рассмотрим $\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)$.

Заметим, что $\ln(1-x) < -x$ при $0 < x < 1$. Действительно, по формуле конечных приращений Лагранжа $\ln(1-x)-\ln(1-0) = \frac{-1}{1-c}(x-0)$, $c \in (0;x)$, значит, $\ln(1-x) = \frac{-1}{1-c}x < -x$.

Поэтому $\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{6}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{3n}\right) < -\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{3n}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\ldots-\frac{1}{3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = -\infty$,

то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n}\right) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-1}{3n}\right)} = 0$.

***Замечание 1.*** Справедливость неравенство $\ln(1-x) < -x$ также можно обосновать, рассмотрев функцию $f(x) = x+\ln(1-x)$. Так как ее производная $f'(x) = 1-\frac{1}{1-x} \le 0$ при $0 \le x < 1$, причем равенство нулю достигается только в точке $x = 0$, то $f(x)$ строго убывает на промежутке $[0;1)$. Значит, из равенства $f(0) = 0$ следует, что $f(x) < 0$ при $x \in (0;1)$.

***Замечание 2.*** Числа $H_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ называют гармоническими. Очевидно, что последовательности гармонических чисел строго возрастает. Ее расходимость можно показать, используя критерий Коши. Действительно, для любого натурального $n$ верно неравенство $\left|H_{2n}-H_n\right| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

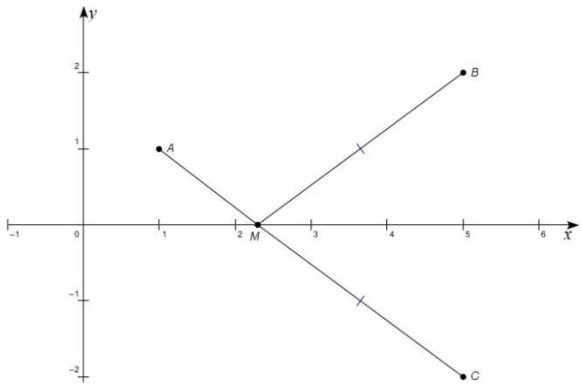
Другой способ доказательства того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$, основан на неравенстве

$$H_{2^n} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) >$$

$$> 1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} = 1+\frac{n}{2}.$$

**Задача 6.** Каждый участник флэш-моба «Мы любим измерять» выбирает произвольную точку, лежащую на оси абсцисс, и вычисляет сумму расстояний до точек (1; 1) и (5; 2). Какое наименьший результат мог получиться у участников флэш-моба?

**Решение.** ***Первый способ.*** Для выбранной точки $(x; 0)$ сумма расстояний $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+4}$. Найдем производную: $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}+\dfrac{x-5}{\sqrt{(x-5)^2+4}}$. Критические точки – это корни уравнения $\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}=\dfrac{5-x}{\sqrt{(x-5)^2+4}}$. Возведя обе части в квадрат, получим уравнение-следствие: $\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2+1}=\dfrac{(5-x)^2}{(5-x)^2+4}$. Выделим целую часть: $1-\dfrac{1}{(x-1)^2+1}=1-\dfrac{4}{(5-x)^2+4}$. Значит, $(5-x)^2=4(x-1)^2$, и $\left[\begin{array}{l}5-x=2(x-1),\\ 5-x=-2(x-1),\end{array}\right.$ откуда $x=\dfrac{7}{3}$ или $x=-3$. Исходному уравнению удовлетворяет только $x=\dfrac{7}{3}$. Так как $f(x)$ и $f'(x)$ определены на всей прямой, $f(x)$ имеет единственную критическую точку $x=\dfrac{7}{3}$, $f'(1)<0$ и $f'(5)>0$, то наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f\left(\dfrac{7}{3}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+4}=5$.




***Второй способ.*** Обозначим $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 2)$, $C(5;\ -2)$. Так как точки $B$ и $C$ симметричны относительны оси абсцисс, то для любой точки $M(x; 0)$ выполняется равенство $MA + MB = MA + MC$. Наименьшая сумма $MA + MC$ достигается в том случае, когда точка $M$ принадлежит отрезку $AC$. Значит, искомая сумма равна $AC=\sqrt{(1-5)^2+(1+2)^2}=5$.

**Решения.**
**Физические факультеты. Старшие курсы.**

**Задача 1.** Найдите значение суммы $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** $\frac{\pi}{4}$.

**Решение.** ***<u>Первый способ.</u>*** В первом интеграле сделаем подстановку $t = \sin^2 z$, $dt = \sin 2z\, dz$, $z \in [0; x]$, а во втором интеграле – подстановку $t = \cos^2 z$, $dt = -\sin 2z\, dz$, $z \in \left[\frac{\pi}{2}; x\right]$. Получим: $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \int\limits_0^{x} z\sin 2z\, dz - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} z\sin 2z\, dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin 2z\, dz$.

Последний интеграл легко вычисляется по частям: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} z\sin 2z\, dz = \left(-\frac{z}{2}\cos 2z + \frac{1}{4}\sin 2z\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

***<u>Второй способ.</u>*** Продифференцировав функцию $f(x) = \int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt$ по правилу Лейбница, с учетом условия $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получим:

$$f'(x) = \left(\sin^2 x\right)' \arcsin\sqrt{\sin^2 x} - \left(\cos^2 x\right)' \arccos\sqrt{\cos^2 x} = 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0.$$

Значит, функция $f(x)$ постоянна. Найдем ее значение при $x = \frac{\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int\limits_0^{1/2} \arcsin\sqrt{t}dt + \int\limits_0^{1/2} \arccos\sqrt{t}dt = \int\limits_0^{1/2} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t})\, dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Здесь мы воспользовались тождеством $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$.

***Замечание 1.*** Равенство $\int\limits_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int\limits_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$ справедливо для любого действительного *x*, так как для любых чисел $a = \sin^2 x$ и $b = \cos^2 x$ можно найти $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ такой, что $a = \sin^2 y$ и $b = \cos^2 y$.

***Замечание 2.*** Тождество $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ вытекает непосредственно из определения обратных тригонометрических функций. Действительно, если $\alpha = \arcsin a$, то $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha = a$. Тогда для угла $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ выполняются равенства $0 \le \alpha \le \pi$ и $\cos\beta = a$. Значит, $\beta = \arccos a$ и $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Другой способ доказательства этого тождества заключается в проверке равенства $\left(\arcsin a + \arccos a\right)' = 0$ и в подстановке произвольного значения *a* в исходную сумму.

***Замечание 3.*** Доказав постоянство функции $f(x)$, можно было подставлять $x=0$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$, но это приводит к более громоздким вычислениям.

**Задача 2.** Исследуйте на сходимость ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\sqrt[2019]{2}\right\}\right)^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sqrt[2019]{2}\right)^n\right\}$, где символом $\{x\}$ обозначена дробная часть числа $x$.

**Решение.** Обозначим $\alpha=\left\{\sqrt[2019]{2}\right\}=\sqrt[2019]{2}-1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left\{\sqrt[2019]{2}\right\}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Для исследования второго ряда в последовательности $a_n=\left\{\left(\sqrt[2019]{2}\right)^n\right\}$ рассмотрим подпоследовательность $a_{2019m+1}=\left\{\left(\sqrt[2019]{2}\right)^{2019m+1}\right\}=\left\{2^m\cdot\sqrt[2019]{2}\right\}=\left\{2^m(1+\alpha)\right\}=\left\{2^m+2^m\alpha\right\}=\left\{2^m\alpha\right\}$. Пусть $a_{2019m+1}=\beta$ для некоторого $m$. Тогда $2^m\alpha=k+\beta$, где $k$ – натуральное число, и значит, $a_{2019(m+1)+1}=\left\{2^{m+1}\alpha\right\}=\left\{2(k+\beta)\right\}=\left\{2\beta\right\}$, т.е. $a_{2019(m+1)+1}=2\beta$ при $\beta<\dfrac{1}{2}$ и $a_{2019(m+1)+1}=2\beta-1$ при $\beta\geq\dfrac{1}{2}$. Из предположения, что начиная с некоторого номера $m_0$, все члены подпоследовательности $a_{2019m+1}$ меньше, чем $\dfrac{1}{2}$, следует, что последовательность $\beta_0;2\beta_0;4\beta_0;...;2^n\beta_0;...$, где $a_{2019m_0+1}=\beta_0$, ограничена, что противоречит равенству $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\beta_0=\infty$. Таким образом, существуют члены подпоследовательности $a_{2019m+1}$ со сколь угодно большими номерами, не меньшие, чем $\dfrac{1}{2}$, а это означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\sqrt[2019]{2}\right)^n\right\}$ расходится по необходимому признаку сходимости.

**Задача 3.** Найдите количество упорядоченных пар действительных чисел $(a;\,b)$ таких, что $(a+ib)^{2019}=a-ib$.

**Ответ:** 2021.

**Решение.** Обозначим $z=a+ib$, $\overline{z}=a-ib$. Имеем уравнение $z^{2019}=\overline{z}$. Так как $|z|^{2019}=\left|z^{2019}\right|=|\overline{z}|=|z|$, то $|z|\left(|z|^{2018}-1\right)=0$. Следовательно, $|z|=0$, т.е. $(a;b)=(0;0)$, или $|z|=1$, и в этом случае уравнение $z^{2019}=\overline{z}$ равносильно уравнению $z^{2020}=\overline{z}z=1$, которое имеет 2020 различных корней.

**Задача 4.** Иван привез из Новой Зеландии редкого попугая какапо, любимым лакомством которого являются шишки дерева риму. Каждый день Иван приезжает в магазин, где можно купить эти шишки. Там он подбрасывает четыре раза монету и покупает столько шишек, сколько раз выпал герб. При этом, если в магазине окажется меньше шишек, чем выпало гербов, то он купит все имеющиеся шишки.

Продавец заказывает шишки из Новой Зеландии по цене 80 долларов за штуку, а продает – по 272 доллара за штуку. Срок хранения шишек – одни сутки, и Иван единственный их покупатель (т.е. все не купленные Иваном шишки продавцу приходится выбрасывать). Сколько шишек дерева риму следует ежедневно заказывать продавцу, чтобы средний ожидаемый дневной доход от их продажи был наибольшим?

**Ответ:** 3.

**Решение.** Количество выпавших гербов подчиняется биномиальному закону распределению для схемы Бернулли с параметрами $n=4$ и $p=q=\frac{1}{2}$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{16}$ |

Пусть случайные величины $X_k$ и $Y_k$ – это количество купленных шишек и прибыль продавца соответственно, если было заказано $k$ шишек (в случае убытков прибыль считаем отрицательной). Очевидно, что продавцу невыгодно заказывать более четырех шишек дерева риму, т.е. $0 \le k \le 4$.

Заметим, что $X_0 = Y_0 = 0$ с вероятностью единица, т.е. в этом случае достоверно, что продавец не несет убытков, но и не получает прибыль.

Пусть $k = 1$. Тогда Иван не покупает шишку только в случае невыпадения ни одного орла. Имеем следующие законы распределения:

| $x_1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y_1$ | -80 | 192 |
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{15}{16}$ |

Тогда математическое ожидание $M\left[Y_1\right]=192\cdot\frac{15}{16}-80\cdot\frac{1}{16}=175$.

Пусть $k = 2$. Тогда Иван не покупает шишек при невыпадении ни одного орла, покупает одну шишку при выпадении одного орла, и покупает две шишки в остальных случаях. Имеем:

| $x_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_2$ | -160 | 112 | 384 |
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{11}{16}$ |

и $M\left[Y_2\right]=384\cdot\frac{11}{16}+112\cdot\frac{1}{4}-160\cdot\frac{1}{16}=282$.

Пусть $k = 3$. Аналогично,

| $x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_3$ | -240 | 32 | 304 | 576 |
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ |

и $M\left[Y_3\right]=576\cdot\frac{5}{16}+304\cdot\frac{3}{8}+32\cdot\frac{1}{4}-240\cdot\frac{1}{16}=287$.

Пусть $k = 4$. Аналогично,

| $x_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | -320 | -48 | 224 | 496 | 768 |
| $p$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

и $M\left[Y_4\right]=768\cdot\frac{1}{16}+496\cdot\frac{1}{4}+224\cdot\frac{3}{8}-48\cdot\frac{1}{4}-320\cdot\frac{1}{16}=224$.

Таким образом, для получения наибольшей (в среднем) прибыли продавец должен заказывать по три шишки дерева риму ежедневно.

**Задача 5.** Существует ли линейное дифференциальное уравнение вида $p(x)\,y''+q(x)\,y'+y=0$ с непрерывными на числовой прямой коэффициентами $p(x)$ и $q(x)$, обладающее линейно независимыми на всей прямой решениями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ такими, что их вронскиан равен нулю в некоторой точке?

**Ответ:** да.

**Решение.** Пусть $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Эти функции линейно независимы, а их вронскиан $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$, и $W(0) = 0$.

Пусть $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ являются решениями уравнения $p(x)y'' + q(x)y' + y = 0$. Тогда $q(x) + x = 0$ и $2p(x) + 2xq(x) + x^2 = 0$. Откуда следует, что $q(x) = -x$ и $p(x) = -\dfrac{x^2}{2}$. Значит, функции $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ являются решением уравнения $\dfrac{x^2 y''}{2} - xy' + y = 0$.

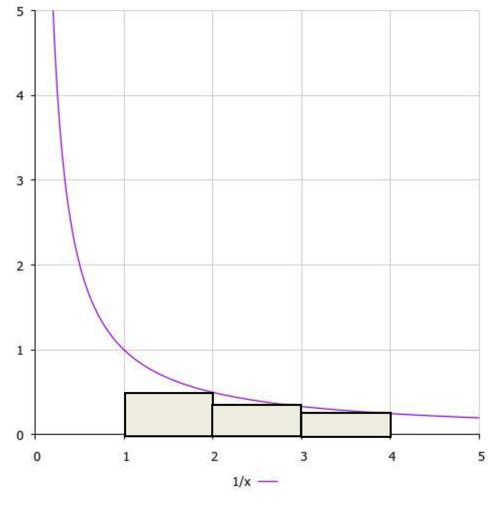
***Замечание.*** В теории дифференциальных уравнений доказана теорема: «Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ есть линейно независимые на $(a,b)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ с <u>непрерывными</u> на $(a,b)$ коэффициентами $p_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, то определитель Вронского функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(a,b)$». Если полученное в решении задачи уравнение записать в приведенном виде $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0$, то для него условия приведённой теоремы не выполнены, так как функции $p_1(x) = -\dfrac{2}{x}$ и $p_2(x) = \dfrac{2}{x^2}$ не являются непрерывными в точке $x = 0$.

**Задача 6.** Найдите значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{k}}$.

**Решение.** Так как ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\dfrac{1}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{k}$ расходятся, то имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Используя справедливое для всех положительных $x$ неравенство $\sin x < x$ и оценивая площадь ступенчатой фигуры, закрашенной на рисунке, криволинейной трапецией, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n. \qquad (1)$$




Используя справедливое для всех $x$ неравенство $\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2} > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) > n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2}. \qquad (2)$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2k^2}$ сходится, то, обозначив его сумму через $s$, из (2) получим: $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{k} > n-s.$ (3)

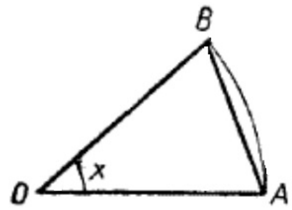
Из (1) и (3) получаем:

$$0<\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{k}}<\frac{1+\ln n}{n-s}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n-s}=0,$ данный предел также равен 0.

**Ответ:** 0.

***Замечание 1.*** Справедливость неравенство $\sin x < x$ для $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ следует из наблюдения, что на рисунке площадь $S_1$ треугольника $OAB$ меньше площади $S_2$ кругового сектора $OAB$. При этом, $S_1=\frac{OA\cdot OB\cdot\sin x}{2}=\frac{R^2\sin x}{2}$, и $S_2=\frac{xR^2}{2}$. А для $x\in\left(\frac{\pi}{2};+\infty\right)$ выполняются неравенства $\sin x<1<\frac{\pi}{2}<x$.




Также неравенство $\sin x < x$ можно обосновать рассмотрев функцию $f(x)=\sin x - x$. Так как ее производная $f'(x)=\cos x-1\le 0$, причем равенство нулю достигается только в изолированных точках вида $x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$, то $f(x)$ строго убывает на всей числовой прямой. Значит, из равенства $f(0)=0$ следует, что $f(x)<0$ при $x>0$.

***Замечание 2.*** Знаменатель можно было оценить, пользуясь монотонностью косинуса для острых углов, т.е. $\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{k}>n\cos 1$.

**Решения.**
**Естественнонаучные факультеты.**

**Задача 1.** Докажите тождество $\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}=\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}$ для неотрицательных $x$. Верно ли это тождество при отрицательных $x$?

**Решение.** ***Первый способ.*** Пусть $x\ge 0$ и $\alpha=\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}$. Тогда $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}$, и $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Значит, $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{x^2}{100+x^2}}=\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}$ (учли, что в первой четверти косинус положителен). Следовательно, $\alpha=\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}$.

Если $x<0$, то $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}<0$, а $0\le\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}\le\frac{\pi}{2}$. Значит, тождество неверно при отрицательных $x$.

***Второй способ.*** Найдём производные от обеих частей равенства при условии $x\ge 0$:

$$\left(\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{100}{100+x^2}}}\left(\frac{-10\frac{2x}{2\sqrt{100+x^2}}}{100+x^2}\right)=\frac{\sqrt{100+x^2}}{x}\frac{10x}{\sqrt{\left(100+x^2\right)^3}}=\frac{10}{100+x^2};$$

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{100+x^2}}}\left(\frac{\sqrt{100+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100+x^2}}}{100+x^2}\right)=\frac{\sqrt{100+x^2}}{10}\frac{100}{\sqrt{\left(100+x^2\right)^3}}=\frac{10}{100+x^2}.$$

Так как производные равны, то выражения отличаются на константу, т.е. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}=\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}+C$. Подставив $x=0$ в полученное тождество, получим $C=0$.

Если же $x<0$, то $\left(\arccos\frac{10}{\sqrt{100+x^2}}\right)'=-\frac{10}{100+x^2}\ne\frac{10}{100+x^2}=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{100+x^2}}\right)'$, и значит, тождество неверно.

**Задача 2.** На плоскости проводятся все возможные окружности, проходящие через точку (0; 1) и касающиеся прямой $y=0$. Определите тип кривой, образованной центрами всех построенных окружностей.

**Решение.** Обозначим через $(x_c;y_c)$ и $R$ – центры и радиусы соответственно искомых окружностей. Тогда окружности с уравнением $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$ проходят через точку (0; 1), а значит, $x_c^2+(1-y_c)^2=R^2$. Кроме того, они касаются прямой $y=0$, а значит, их центры находятся на расстоянии радиуса от этой прямой, т.е. $R=|y_c|$ или $y_c^2=R^2$. Приравняем левые части полученных равенств: $x_c^2+(1-y_c)^2=y_c^2$. Откуда $y_c=\frac{x_c^2+1}{2}$. Значит, искомая кривая является параболой.

**Задача 3.** На доске записаны друг за другом 10 квадратных матриц второго порядка, причем произведение любых трех подряд записанных матриц, а также произведение всех десяти матриц равно матрице, на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца которой расположено число $i + j$. Найдите седьмую по порядку матрицу.

**Ответ:** $\begin{pmatrix} 25 & -18 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, и на доске записаны матрицы $X_1$, $X_2$, …, $X_{10}$. Тогда $A = \left(X_1X_2X_3\right)\cdot(X_4X_5X_6)\cdot X_7\cdot(X_8X_9X_{10}) = A^2X_7A$. Умножив обе части равенства $A^2X_7A = A$ на $A^{-1}$ справа и на $A^{-2}$ слева, получим $X_7 = A^{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-2}$. Вычислим: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $\left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 25 & -18 \\ -18 & 13 \end{pmatrix}$.

**Задача 4.** Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{24}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$.

**Ответ:** 1.

**Решение.** Заметим, что $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ для всех натуральных $k$. Значит,

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!} == \left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+..+\frac{1}{n!}\right)-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+..+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{24}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$.

**Задача 5.** Для участия в шествии ТГУ декан построил студентов в колонну по 4, но при этом студент Иванов остался лишним. Тогда декан построил студентов в колонну по 5. И снова Иванов остался лишним. Когда же и в колонне по 6 Иванов оказался лишним, декан пообещал его отчислить. После этого в колонне по 7 Иванов нашел себе место, и никого лишнего не осталось. Сколько студентов факультета пришло на шествие, если известно, что на факультете учится менее 500 студентов?

**Ответ**: 301.

**Решение.** Если пришло $n$ студентов, то $(n - 1)$ кратно 60, а $n$ кратно 7. Сделаем перебор.

| $n-1$ | 60 | 120 | 180 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 61 | 121 | 181 | 241 | **301** | 361 | 421 | 481 |

В таблице выделен единственный возможный вариант, когда $n$ делится на 7 без остатка.

**Задача 6.** Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-10x+29}$.

**Решение.** ***<u>Первый способ.</u>*** $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}+\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$. Критические точки – это корни уравнения $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} = \frac{5-x}{\sqrt{x^2-10x+29}}$. Возведя обе части в квадрат, получим уравнение-следствие: $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+2}=\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-10x+29}$. Выделим целую часть: $1-\dfrac{1}{x^2-2x+2}=1-\dfrac{4}{x^2+10x+29}$. Значит, $x^2-10x+29=4(x^2-2x+2)$ или $3x^2+2x-21=0$ откуда $x=\dfrac{7}{3}$ или $x=-3$. Исходному уравнению удовлетворяет только $x=\dfrac{7}{3}$. Так как $f(x)$ и $f'(x)$ определены на всей прямой, $f(x)$ имеет единственную критическую точку $x=\dfrac{7}{3}$, $f'(1)<0$ и $f'(5)>0$, то наименьшее значение функции $f(x)$ равно $f\left(\dfrac{7}{3}\right)=\sqrt{\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+1}+\sqrt{\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+4}=5$.

***Второй способ.*** Обозначим $A(1;\ 1)$, $B(5;\ 2)$, $C(5;\ -2)$. Тогда для произвольной точки $M(x;\ 0)$, лежащей на оси абсцисс, $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+4}$ – это сумма расстояний от точки $M$ до точек $A$ и $B$. Так как точки $B$ и $C$ симметричны относительны оси абсцисс, то выполняется равенство $MA + MB = MA + MC$. Наименьшая сумма $MA + MC$ достигается в том случае, когда точка $M$ принадлежит отрезку $AC$. Значит, искомая сумма равна $AC=\sqrt{(1-5)^2+(1+2)^2}=5$.