ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Н. Круликовский

ИЗ ИСТОРИИ
РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В ТОМСКЕ

Томск
2006

УДК 51(571.16)
ББК 22.1г(2Р53)
К 84

Круликовский Н.Н.
К 84 Из истории развития математики в Томске. – Томск: Томский государственный университет, 2006. – 174 с.

ISBN 5-94621-175-7

В книге содержится общий очерк развития математики в г. Томске с начала деятельности ученых-математиков и высшего математического образования в Сибири.

Для широкого круга читателей, интересующихся историей математики.

УДК 51(571.16)
ББК 22.1г(2Р53)

Редактор
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАО, профессор
И.А. Александров

ISBN 5-94621-175-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1967 г. в издательстве Томского государственного университета была выпущена книга «История развития математики в Томске», в которой был дан общий очерк развития математических исследований с начала деятельности ученых-математиков и высшего математического образования в Сибири.

Издание книги совпало с 50-летием открытия в Томском университете физико-математического факультета, на базе которого выросли современные механико-математический, физические и естественные факультеты.

История развития математики в Томске составляет основную часть истории математики в Сибири, так как более полувека этот старейший университетский город был основным центром математических исследований в Сибири.

Развитие математики в Томске связано с деятельностью различных высших учебных заведений, прежде всего Томского технологического института (теперь политехнического университета), открытого в 1900 г., и Томского университета с момента открытия в нем физико-математического факультета в 1917 г.

История развития математики в Томске будет неполной, если не рассмотреть работы по прикладным математическим наукам, прежде всего по механике и астрономии. Поэтому в книге рассмотрены некоторые вопросы развития этих наук, связанных в начальный период с деятельностью математических кафедр и механико-математического факультета.

За прошедшие годы после издания книги произошло значительное расширение научных исследований по математическим наукам, особенно в прикладных областях (информатика, кибернетика).

В этом, втором, издании книги продолжено изложение истории развития традиционных математических исследований, проводимых сотрудниками механико-математического факультета Томского государственного университета.

Библиография, помещенная в книге, не ставит целью перечислить все работы, опубликованные томскими математиками, а содержит список использованной литературы, включающий, кроме историко-математических работ, основные труды отдельных ученых.

Более полная библиография опубликованных работ томских математиков содержится в таких изданиях, как «Математика в СССР за 40 лет», «Математика в СССР» (1958–1967), «Профессора Томского университета».

За помощь при подготовке первого издания книги автор признателен редактору книги – профессору П.П. Куфареву, а также Р.Н. Щербакову, Г.И. Назарову, А.А. Сивкову, Э.Ф. Молиной и Н.Л. Вишневской за предоставленные материалы.

Выражаю благодарность инициатору нового издания и редактору книги профессору И.А. Александрову; за содействие и помощь по изданию – декану ММФ В.Н. Берцуну; за сделанные замечания и дополнения по тексту – профессорам С.П. Гулько, П.А. Крылову, Г.Г. Пестову, А.М. Гришину, С.Я. Гриншпону; за техническое оформление – Я.С. Гриншпону и моей дочери О.Н. Круликовской.

Пользуюсь случаем выразить благодарность коллективу механико-математического факультета Томского университета за внимание и поддержку при работе над книгой.

ВВЕДЕНИЕ

Среди проблем истории математики в нашей стране значительное место занимают вопросы изучения деятельности научных обществ, научных учреждений и высших учебных заведений [1–3]. За прошедшие годы проведены исследования о развитии математики в Академии наук [4, 5, 40], нескольких математических обществах [6–10], ряде университетов и в других высших учебных заведениях. Естественно, что внимание исследователей прежде всего было привлечено к истории преподавания математики и развития математических исследований в старейших университетах страны – Московском [11–15], Казанском [16–19], Харьковском [20], Тартуском [21, 22]. Позднее появились работы по истории преподавания математики и деятельности ученых-математиков в Одесском (Новороссийском) [23], Ростовском [24], Ленинградском (Петербургском) [25], старом Вильнюсском [26, 27], Львовском [28], Киевском университетах [29, 30], Киевском политехническом институте [31], Воронежском университете, Ленинградском горном институте [32], Уральском политехническом институте, Узбекском университете [33]. Отдельные издания были посвящены развитию математики в союзных республиках (Украина [34, 35], Азербайджан [36, 37], Казахстан [38], Грузия, Прибалтийские республики [39]). Многие книги рассказывали о жизни и научно-педагогической деятельности некоторых ученых. В более ранних работах преимущественно освещался период до конца XIX в. [11, 12, 21], а публикации 1955–1965 гг. все чаще распространяются на начало XX в. и советский период [9, 14, 35, 39].

Обзор исследований по истории отечественной математики был дан на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г. и на IV Всесоюзном математическом съезде в 1961 г. [3]. Обширный библиографический материал содержится в указанных выше библиографических сборниках.

Много материалов о развитии математики в различных научных центрах опубликовано в сборниках «Историко-математические исследования» (1949–2003 гг.). Результатом работы большого коллектива историков математики стало издание «История отечественной математики» в 4 томах [2].

Историко-математические исследования указанного направления ввели в научный обиход огромный фактический материал, позволили отчетливее увидеть вклад в развитие мировой науки, внесенный отечественной математикой, и оценить важность большой подготовительной работы, проделанной в научных учреждениях, обществах и учебных заведениях, прежде всего в университетах, по развитию и распространению математической культуры, что обусловило прогресс математики в нашей стране. Историко-математические исследования о деятельности отечественных научных математических центров имеют значение для создания и разработки истории развития различных отдельных математических дисциплин, школ и направлений. Создание монографических работ по истории этих дисциплин и направлений является одной из главных проблем истории математики в настоящее время и вызвано потребностями настоящего и будущего развития самих дисциплин.

Наконец, историко-математические исследования рассматриваемого направления позволяют создать историю отечественной математики в дореволюционный и советский периоды с раскрытием закономерностей ее развития в связи с общей историей государства и культуры.

В этом свете можно отметить, что история развития математики в старейшем культурном центре, каким является город Томск, до сего времени не может считаться достаточно разработанной. Создание новых научных центров в Сибири, в том числе и математических, создало новые условия для дальнейшего развития математики, математических исследований и математического образования в Сибири, поэтому разработка вопросов истории развития математики в Томске должна представлять интерес и с точки зрения перспектив и направлений будущих научных исследований по математике.

В данной работе рассмотрено развитие математических исследований в Томске с начала высшего математического образования в Сибири. Этот период целиком относится к XX в. и датируется 1900 г.

Для характеристики деятельности томских высших учебных заведений использованы данные различных справочных изданий по этим учебным заведениям [1, 77] и материалы, опубликованные в связи с празднованием ряда юбилейных дат [46]. По истории Томского государственного университета имени В.В. Куйбышева привлечены материалы из книги П.А. Зайченко «Томский государственный университет имени В.В. Куйбышева. Очерки по истории первого сибирского университета за 75 лет (1880–1955)» [47], «Томский университет. 1880–1980» [44].

Организации физико-математического образования в Томском технологическом институте и на Высших женских курсах в период 1900–1925 гг. посвящена книга В.Н. и Л.А. Беломестных [94].

Сведения о развитии математики в Томском педагогическом институте (ныне университете) помещены в книгах по его истории [306].

Библиографические материалы о работах томских математиков находятся в книгах: «Труды ученых в изданиях Томского университета (1889–1958)» [48], а также в сборниках «Математика в СССР за тридцать лет (1917–1947)» [41] и «Математика в СССР за сорок лет (1917–1957)» [42], «Математика в СССР (1958–1967)» [43]. Библиографические материалы о работе математиков, работающих в Томском университете, помещены также в обзорах научной деятельности Томского университета за 1959–1964 гг. [49]. Сведения о диссертациях, защищенных в Томском университете, имеются в указателе [50], изданном в 1955 г.

Значительная часть трудов томских математиков опубликована в Томске в различных изданиях Томского университета («Известия» [51], «Ученые записки» [52], «Труды» [53]), Научно-исследовательского института математики и механики при Томском университете [54, 55], Сибирского физико-технического института при Томском университете [56], изданиях других высших учебных заведений г. Томска [57–61], сборниках докладов проходивших в Томске научных конференций [62–66].

Большое число работ томских математиков опубликовано в других советских и зарубежных изданиях (различные журналы, сборники материалов математических конференций, съездов, симпозиумов и т.п.) [67–71].

Для характеристики отдельных работ томских математиков, кроме непосредственного ознакомления с работой, привлекались материалы реферативных журналов [72–74], обзорных статей (например, сборники [41, 42]), аннотаций [49], различных библиографических указателей [75, 76].

По некоторым разделам исследований томских математиков (дифференциальная геометрия, теория функций комплексного переменного) опубликованы обзорные доклады или статьи [105–115].

Об отдельных ученых опубликованы некоторые эпизодические материалы в газетах и журналах. Здесь следует упомянуть статью Г.Д. Суворова о П.П. Куфареве с анализом его научного творчества [78] и статью о Н.П. Романове [79].

В 1997–2004 гг. по решению совета механико-математического факультета была издана серия брошюр-биографий с указателями трудов ученых факультета: П.П. Куфарева, З.И. Клементьева, Е.Д. Томилова, Р.Н. Щербакова, Е.Н. Аравийской, Ф.Э. Молина, Г.Д. Суворова, И.Х. Беккера, В.В. Черникова, Р.М. Малаховской, Л.А. Вишневского, В.В. Слухаева, Н.Н. Горячева, Б.П. Куфарева. В создании этой серии приняли участие многие сотрудники факультета. Инициатором, автором и ответственным за выпуск большинства брошюр стал профессор И.А. Александров.

В статье В.В. Гуссова [80] рассмотрены математические работы В.П. Алексеевского. Ф.А. Медведев в своих работах по истории теории множеств [81–83] отмечает заслуги В.Л. Некрасова.

Предметом специальных историко-математических исследований, прежде всего, стала деятельность профессора Ф.Э. Молина, проработавшего в Томске 40 лет. Изучение алгебраических работ Ф.Э. Молина было начато в 1952–1955 гг. Н.Ф. Кануновым. Результаты этого исследования опубликованы в ряде статей и книге «Федор Эдуардович Молин», изданной в серии научных биографий издательства Академии наук [92]. К.Ф. Агапова [93] изучала научно-педагогическую деятельность Ф.Э. Молина в Томске. Краткие биографические сведения о Ф.Э. Молине имеются в различных справочных изданиях (Большая советская энциклопедия. 2-е изд. и др.).

Автором данной книги были собраны научные труды Ф.Э. Молина и поставлен вопрос об издании их в виде сборника. Идея была поддержана членом-корреспондентом Академии наук Б.Н. Делоне, академиком А.И. Мальцевым, вице-президентом Молдавской академии наук В.А. Андрунакиевичем. В 1985 г. сборник основных алгебраических работ Ф.Э. Молина был издан при активном участии Института математики Сибирского отделения Академии наук и алгебраистов из других научных центров [128 а].

1. НАЧАЛО ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧЕНЫХ-МАТЕМАТИКОВ И ВЫСШЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В СИБИРИ (1900–1917 гг.)

§ 1

Начало деятельности ученых-математиков в Сибири и высшего математического образования связано с открытием первых высших учебных заведений в Сибири – Томского университета и Томского технологического института.

Вопросы истории математики и математического образования в Сибири более раннего периода до настоящего времени не изучались. Нет сведений о возникновении и формировании первоначальных математических представлений у коренных народов Сибири. Внимания исследователей заслуживают вопросы истории математического образования в Сибири. Сибирская школа до конца XIX в. имела немало выдающихся деятелей и талантливых учителей математики. Ее воспитанниками были многие выдающиеся ученые, в том числе и математики. Томскую гимназию закончили известный математик академик Н.Н. Лузин (1883–1950) и известный педагог и методист К.Н. Рашевский (1874–1956). Представляет интерес изучение просветительной деятельности в области математики декабристов, сосланных в Сибирь. Известно, например, что Г.С. Батеньков преподавал математику в средних учебных заведениях и написал учебник геометрии.

О своем земляке Н.Н. Лузине в Томске не забыли. В 1963 г. в связи с его 80-летием в областных газетах были опубликованы статьи о нем как создателе математической научной школы, выдающемся математике. Одна статья была написана сотрудником областного архива Л. Муравьевой. В 1983 г. Томское отделение Сибирского математического общества провело конференцию, посвященную 100-летию со дня его рождения, с участием академика Казахской академии наук, научного сотрудника Института математики Сибирского отделения Академии наук А.Д. Тайманова. В 1992 г. в журнале «Томская старина» была опубликована статья «Наш земляк академик Н.Н. Лузин» [100].

При учреждении первого сибирского университета в Томске предполагалось создание в нем физико-математического факультета. Однако в 1888 г. Томский университет был открыт в составе одного медицинского факультета. В 1898 г. в Томском университете открылся второй факультет – юридический. Открытие физико-математического факультета, несмотря на ходатайства совета университета и сибирской общественности, под различными предлогами не было разрешено в течение 30 лет.

В 1900 г. было открыто второе высшее учебное заведение Сибири – Томский технологический институт. В новом институте 9 октября 1900 г. (по ст. ст., т.е. 22 октября 1900 г. по н. ст.) состоялась первая лекция по аналитической геометрии, прочитанная В.Л. Некрасовым.

Для организации преподавания в новом Томском технологическом институте были приглашены видные ученые различных специальностей: геолог В.А. Обручев, химики Д.П. Турбаба и Н.М. Кижнер, инженер-механик И.И. Бобарыков и другие. Для руководства кафедрой математики был приглашен Ф.Э. Молин, назначенный ординарным профессором. Преподавателем математики был назначен также воспитанник Казанского университета В.Л. Некрасов, утвержденный в 1901 г. исполняющим должность экстраординарного профессора. Для проведения практических занятий по математике и механике привлекались в первые годы после открытия института преподаватели других инженерных специальностей. В Томском технологическом институте с самого начала преподаванию математики уделялось большое внимание. В речи, посвященной началу занятий, директор института профессор Е.Л. Зубашев отметил, что «в основу инженерного образования, прежде всего, должна быть положена теоретическая подготовка... Математика также должна входить в цикл наук, необходимых для инженерного образования, ибо она представляет один из методов исследования, дающий наиболее удобный путь к обобщениям и приложимый как в вышеупомянутых… науках (физика, химия, механика. – *Н.К.*), так и в прикладных: не зная математики, трудно понять и уяснить себе сущность физических и механических законов» [77. С. 24].

Основная работа по организации преподавания математики в институте была выполнена Федором Эдуардовичем Молиным. Он был первым профессором математики в Сибири. С его именем связано начало высшего математического образования и математических исследований в Сибири. Ф.Э. Молин прибыл в Томск и приступил к исполнению своих обязанностей ординарного профессора математики в Томском технологическом институте в начале 1901 г.

§ 2

Многолетняя научная и педагогическая деятельность Ф.Э. Молина связана с двумя научными и культурными центрами Прибалтики и Сибири – городами Тарту и Томском.

Федор Эдуардович Молин родился 10 сентября (29 августа по ст. ст.) 1861 г. в Риге. Прадед Ф.Э. Молина был родом из Швеции, в середине XVIII в. он поселился в России, недалеко от Ревеля (Таллина), и был учителем приходской школы. Его сын, дед Ф.Э. Молина, Андрей Молин был часовым мастером. Отец Федора Эдуардовича, Эдуард Молин (1823–1870), получил образование в Рижской гимназии и Дерптском университете. После окончания университета в 1843 г. и сдачи экзамена на звание учителя классических языков он работал домашним и частным учителем в Риге, а позднее заведовал частным учебным заведением.

Среднее образование Ф.Э. Молин получил в Рижской губернской гимназии, в которой он учился в 1872–1879 гг. По окончании гимназии Ф.Э. Молин в январе 1880 г. поступил на физико-математический факультет Дерптского университета, где числился студентом астрономии. На выбор Ф.Э. Молиным специальности оказало влияние существование при университете одной из немногих в те времена астрономической обсерватории, где в течение всего XIX в. проводились систематические наблюдения. Кроме того, Ф.Э. Молин через астрономию видел возможность практического применения знаний, полученных в университете.

В период обучения Ф.Э. Молина в Дерптском университете кафедру чистой математики занимал профессор П. Гельмлинг, читавший курсы по аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению и теории чисел. Кафедру прикладной математики с 1843 по 1883 г. занимал профессор Ф. Миндинг. Он читал различные курсы по механике (статике, динамике, теории упругости), а также по методу наименьших квадратов, теории уравнений, диоптрике. Учеба Ф.Э. Молина совпадала с последними годами сорокалетней деятельности Ф. Миндинга в Дерптском университете. Важнейшие исследования Ф. Миндинга относятся к дифференциальной геометрии (поверхность постоянной кривизны, теория линий, лежащих на поверхности) и интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка. Известны работы Ф. Миндинга и по другим разделам математики. Учеником Ф. Миндинга был известный русский геометр К.М. Петерсон. После Ф. Миндинга кафедру прикладной математики занял молодой шведский астроном и математик Андерс Линдштедт (р. 1854), имевший в Дерпте с 1879 г. должность астронома-наблюдателя и одновременно читавший в университете разнообразные математические курсы (по новейшей геометрии и алгебре, теории аналитических функций и др.). А. Линдштедту принадлежит ряд интересных работ по небесной механике и интегральному исчислению. Его работы были опубликованы в «Мемуарах Петербургской академии наук». Он организовал математический семинар для студентов старших курсов с целью содействия их самостоятельным научным исследованиям. Ф.Э. Молин слушал вышеуказанные курсы А. Линдштедта и в течение двух семестров работал в его семинаре.

За годы обучения в университете Ф.Э. Молин изучал также астрономию, физику, участвовал в астрономических наблюдениях в обсерватории, прослушал курс русской литературы. При окончании университета Ф.Э. Молин выполнил свою первую научную работу по астрономии об определении орбиты кометы 1883 III. В этой работе Ф.Э. Молин показал себя искусным вычислителем и серьезным исследователем. Работа [116] была напечатана в немецком астрономическом журнале «Astronomische Nachrichten». Руководивший в этот период научными занятиями Ф.Э. Молина профессор А. Линдштедт признавал за ним «совершенно необыкновенную научную одаренность». В октябре 1883 г. Ф.Э. Молин окончил университет со степенью кандидата астрономии и был оставлен при университете для подготовки к научной деятельности. К моменту окончания университета научные интересы Ф.Э. Молина сосредоточились на вопросах математики. В течение следующих двух лет Ф.Э. Молин находился в научной командировке в Лейпциге, где слушал лекции и работал в научном семинаре известного математика Феликса Клейна. Результаты выполненной в эти годы Ф.Э. Молиным работы по теории линейных преобразований эллиптических функций на основе теории Вейерштрасса составили содержание двух опубликованных статей [119] и магистерской диссертации, защищенной в октябре 1885 г. в Дерптском университете.

В указанных работах Ф.Э. Молина рассматривается теория линейных преобразований двоякопериодических функций. Наиболее значительный интерес представляет здесь теория линейных преобразований Ф-функции, в которых встречается в виде множителя корень восьмой степени из единицы. Поведение функций Эрмита $\chi(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ оказывается возможным изучить по свойствам некоторой единственной функции корня 24-й степени из дискриминанта уравнений преобразований.

В течение следующих 15 лет Ф.Э. Молин был доцентом кафедры чистой математики Дерптского (с 1893 г. – Юрьевского) университета. Должность доцента математики в Дерптском университете была установлена для Ф.Э. Молина и явилась третьей должностью математика в университете. За эти годы Ф.Э. Молин разрабатывает и читает разнообразные курсы лекций (по теории аналитических и эллиптических функций, новейшей геометрии и алгебре, теории алгебраических уравнений, теории чисел, проективной геометрии, теории кватернионов, истории математики и др.); некоторые из этих курсов были новыми для Дерптского университета.

В центре научных интересов Ф.Э. Молина в этот период оказываются вопросы алгебры: теория систем высших комплексных чисел (по современной терминологии теория ассоциативных алгебр) и теория представления групп.

После введения Гамильтоном в 1843 г. кватернионов и работ Грассмана по многомерным пространствам во второй половине XIX в. продолжались интенсивные исследования по изучению числовых систем. Уже в работах А. Кэли по теории матриц в 1850–1860 гг. большее внимание обращается на поведение коэффициентов уравнений преобразований, чем на поведение переменных. А. Кэли указал систему из 4 матриц второго порядка, для которой выполнялись основные соотношения алгебры кватернионов. Этим замечанием было положено начало теории представления систем гиперкомплексных чисел при помощи матриц. С 1870 г. начинаются исследования структуры ассоциативных алгебр конечной размерности над полем действительных или комплексных чисел. В работе Б. Пирса было проведено перечисление ассоциативных алгебр, образованных квадратными матрицами. Б. Пирс дал таблицы числовых систем по числу основных чисел, признавая неполноту данной им классификации. У.К. Клиффорд проводит изучение специального класса алгебр. Около 1880 г. в этом же направлении шли исследования А. Кэли и Д. Сильвестра.

Идея представления систем гиперкомплексных чисел или ассоциативных алгебр при помощи матриц, наметившаяся у А. Кэли, получает более ясное и полное выражение у Э. Лагерра в 1876 г., в работе Ф.Г. Фробениуса 1877 г. и, наконец, в общем виде сформулирована Ч.С. Пирсом в 1879–1881 гг. В основе работы Э. Вейра 1887 г. по теории ассоциативных числовых систем лежит их представление с помощью матриц. К. Вейерштрасс занимался исследованием коммутативных числовых систем. Р. Дедекинд исследовал класс числовых систем с коммутативным умножением.

Ф.Г. Фробениус в 1878 г. доказал, что алгебра кватернионов представляет собой единственную алгебру конечной размерности без делителей нуля над полем действительных чисел.

В 1884 г. А. Пуанкаре заметил, что линейные преобразования, которые служат для построения системы гиперкомплексных чисел, образуют группу. Подробное изложение связи числовых систем и групп преобразований было дано в работах Г. Шефферса и Э. Студи, опубликованных в 1889 г. В этих работах на первый план выдвигаются числовые системы с однозначным делением, что соответствует требованиям теории групп. Э. Студи дает полное перечисление числовых систем с числом основных единиц до четырех, дополнив тем самым исследования Б. Пирса. Г. Шефферс идет дальше. В своей работе он ставит задачу нахождения правил, с помощью которых из числовых систем с меньшим числом основных единиц можно было бы получить числовые системы с большим числом основных чисел. Ф.Э. Молин считал его доказательства недостаточными. Г. Шефферсом было дано разделение числовых систем, по его терминологии, на системы конических сечений и системы неконических сечений. Целесообразность такого разделения была подтверждена исследованиями Ф.Э. Молина. С. Ли обратил внимание на числовые системы, у которых связанная с числовой системой группа G_n обладает простой подгруппой G_{n-1}. С. Ли заметил также, что числовых систем с 5, 6, 7, 8 основными числами не существует. Ф. Шур в 1888 г. показал, что основные определения свойств комплексной числовой системы вытекают из некоторого общего выражения теории групп преобразований, без обращения к свойствам обычной комплексной числовой системы и кватернионов. Таково было состояние теории систем гиперкомплексных чисел во второй половине 80-х гг. XIX в., когда Ф.Э. Молин начал заниматься вопросами строения систем гиперкомплексных чисел. В период выполнения своей магистерской диссертации по теории линейных преобразований эллиптических функций Ф.Э. Молин проявлял интерес к исследованиям С. Ли по теории непрерывных групп преобразований. В архиве Ф.Э. Молина сохранились его конспекты лекций Ф. Энгеля по теории групп преобразований, по-видимому, относящиеся ко времени пребывания Ф.Э. Молина в Лейпциге. Следует иметь в виду, что один из последователей С. Ли Ф. Шур с 1888 по 1892 г. был профессором математики Дерптского университета.

Основные результаты исследований по теории систем гиперкомплексных чисел были изложены Ф.Э. Молиным в статье «О системах высших комплексных чисел» в 1891 г. Эта статья [120] была опубликована в одном из основных математических журналов «Mathematische Annalen» в 1892 г. Работа была представлена в качестве докторской диссертации. После ее защиты в Дерптском университете 30 сентября 1892 г. Ф.Э. Молин был утвержден доктором чистой математики.

В работе «О системах высших комплексных чисел» Ф.Э. Молина заложены основы общей теории системы гиперкомплексных чисел. В этой работе устанавливается некоторая нормальная форма основных единиц для систем гиперкомплексных чисел, а также связь их с группами и матрицами. Здесь Ф.Э. Молиным доказаны очень важные теоремы о строении систем гиперкомплексных чисел или ассоциативных алгебр. Прежде всего, Ф.Э. Молин выделяет числовые системы, названные им простыми числовыми системами (простые алгебры по новейшей терминологии). На такие числовые системы, как отмечено выше, обратил внимание в своих исследованиях С. Ли. Ф.Э. Молин исходит из другого определения. Простые числовые системы он характеризует тем, что для таких систем при линейных преобразованиях уравнений, определяющих произведения, нельзя выделить части уравнений для числовой системы с меньшим числом основных единиц. Важным результатом исследований Ф.Э. Молина является теорема о том, что любая простая числовая система обладает квадратным числом основных единиц.

Для простых числовых систем Ф.Э. Молиным получены представления в виде квадратных матриц, элементы которых друг от друга независимы. Применяя современную терминологию, эти результаты Ф.Э. Молина означают, что любая простая ассоциативная алгебра ранга 2 или высшего над полем комплексных чисел изоморфна алгебре всех квадратных матриц подходящего порядка над этим же полем.

Следующий важный результат работы Ф.Э. Молина состоит в том, что для любой числовой системы находится нормальная форма, которая позволяет подразделить все числовые системы на классы, при этом все системы одного класса определяются через одну систему класса. Введенное Ф.Э. Молиным понятие, по существу, эквивалентное понятию двустороннего идеала, позволило изучить структуру произвольной числовой системы над полем комплексных чисел.

Исследования Ф.Э. Молина явились основополагающими для теории строения ассоциативных алгебр. Работа «О системах высших комплексных чисел» Ф.Э. Молина получила сразу высокую оценку в математическом мире. По выражению Ф.Г. Фробениуса, Ф.Э. Молин «одним ударом дал почти полное решение наиболее важных вопросов в этой области». По более поздней оценке Н. Бурбаки, «наиболее важные результаты этого периода принадлежат Ф. Молину».

В дальнейших работах по теории строения систем гиперкомплексных чисел постоянно содержатся указания и ссылки на исследования Ф.Э. Молина. Уже в 1893 г., т.е. через год после опубликования основной работы Ф.Э. Молина, в книгах С. Ли «Лекции о непрерывных группах с геометрическими и другими применениями» [85] и «Теория групп преобразований» [86] содержится подробное изложение результатов исследований Ф.Э. Молина. Во французском и немецком изданиях «Математической энциклопедии» работа Ф.Э. Молина также изложена достаточно подробно.

Вскоре после работы Ф.Э. Молина были опубликованы исследования Э. Картана, в которых наряду с введением новых понятий в теории систем гиперкомплексных чисел (полупростая алгебра, числовые инварианты) результаты Ф.Э. Молина были распространены на системы гиперкомплексных чисел над полем действительных чисел.

В первых своих работах по теории строения систем гиперкомплексных чисел, относящихся к 1904–1905 гг., Д. Веддерборн постоянно ссылается на исследования Ф.Э. Молина. В последующих работах с 1907–1908 гг. Д. Веддерборн распространил результаты Ф.Э. Молина на случай ассоциативных алгебр над произвольным полем.

Строение простых алгебр над полем комплексных чисел полностью описывается теоремой Ф.Э. Молина. Из результатов Д. Веддерборна, относящихся к произвольным полям, применительно к случаю простых алгебр над полем комплексных чисел следует теорема Ф.Э. Молина.

Основополагающее значение исследований Ф.Э. Молина в теории строения систем гиперкомплексных чисел отмечается многими авторами монографий и книг по теории ассоциативных алгебр и теории представления групп. Например, Г. Вейль в известной книге «Классические группы, их инварианты и представления» [88] пишет: «После создания Гамильтоном исчисления кватернионов (1843) и долгого периода более или менее формальных изысканий... Молин (1892) был фактически первым, кто достиг некоторых общих и глубоких результатов в этом направлении».

За научные заслуги Ф.Э. Молин был избран в 1892 г. членом Московского математического общества. В 1894 г. во Франции в знак признания научных заслуг Ф.Э. Молину была вручена медаль в честь известного французского математика Ш. Эрмита.

За годы работы доцентом в Дерпте Ф.Э. Молин совершил несколько научных поездок. В осеннем семестре 1892 г. он находился в Москве, где посещал лекции профессора Б.К. Млодзеевского по высшей геометрии, профессора П.А. Некрасова – по интегральному исчислению и по вариационному исчислению, Л.К. Лахтина – по теории функций комплексного переменного. 15 сентября 1892 г. Ф.Э. Молин сделал сообщение «Об одном предложении Сильвестра» в Московском математическом обществе.

После опубликования основного научного труда и защиты докторской диссертации Ф.Э. Молин в нескольких последующих статьях развивает и применяет теорию систем гиперкомплексных чисел к ряду вопросов алгебры.

В заметке [121], написанной в период пребывания в Москве вскоре после защиты диссертации, дается улучшенное доказательство одной теоремы из статьи «О системах высших комплексных чисел». В двух статьях, опубликованных в сборниках Общества естествоиспытателей при Юрьевском (Дерптском) университете, Ф.Э. Молин рассматривает некоторые теоремы теории однородных групп подстановок. В одной из них [122] изучается представление данной дискретной группы в виде однородной линейной группы подстановок. При доказательстве теорем применяется теория систем гиперкомплексных чисел. Показано, что данная группа подстановок может быть разложена на неприводимые части. Основной итог этой статьи состоит в том, что все линейные группы подстановок с правилами составления, такими же, как для данной дискретной конечной группы, могут быть получены из «правил составления» этой группы. В другой статье «О числе переменных неприводимой группы подстановок» [123] дано детальное исследование свойств неприводимых групп подстановок. Основной результат этой статьи сформулирован в виде теоремы: число переменных неприводимой группы подстановок есть делитель числа подстановок. Несмотря на значительность полученных результатов указанные статьи получили меньшую известность, так как были опубликованы в малораспространенном издании.

Результаты Ф.Э. Молина о свойствах групп подстановок, изложенные в вышеуказанных статьях, оказались близкими с выводами Ф.Г. Фробениуса, содержащимися в статьях последнего «О групповых характерах и о простых множителях групповых определителей» и «О представлениях конечных групп линейными подстановками», опу- бликованными в 1896–1897 гг.

Ознакомившись с работами Ф.Э. Молина, Ф.Г. Фробениус в письмах к ряду ученых и в своих дальнейших работах отмечал большую научную ценность его исследований. Между учеными возникла плодотворная научная переписка. В письме к Ф.Э. Молину 14 декабря 1897 г. Ф.Г. Фробениус писал: «С Вашими работами... я ознакомился лишь недавно, иначе в своих исследованиях я мог бы избежать лишнего труда. С другой стороны, конечно, является плюсом то, что мы независимо друг от друга работали в одной области, ибо таким образом появились совершенно различные методы для исследования групповых детерминантов». Узнав из сообщения Ф.Г. Фробениуса о его последних работах, в то время, по-видимому, еще не опубликованных, Ф.Э. Молин изложил результаты своих дальнейших исследований в статье «Об инвариантах линейных групп подстановок» [124], которая по представлению Ф.Г. Фробениуса была напечатана в «Докладах Берлинской Академии наук». В работе изучается число представлений переменных неприводимой группы подстановок при помощи целых однородных функций переменных другой группы, изоморфной с первой. Для решения поставленной задачи применяются характеристические уравнения группы подстановок. Для разложения группы подстановок на неприводимые составляющие Ф.Э. Молиным было введено понятие анализатора группы, имеющего связь с характером группы. Работы Ф.Э. Молина, наряду с работами Ф.Г. Фробениуса, лежат в основе теории представления групп линейными преобразованиями.

Фундаментальное значение работ Ф.Э. Молина для теории представления групп отмечали авторы известных руководств по теории групп, например А. Шпейзер в «Теории групп конечного порядка» [87] и Г. Вейль в книге «Теория групп и квантовая механика» [89] и упомянутой выше книге «Классические группы, их инварианты и представления» [88].

Вопросы теории представления групп подстановками были предметом обсуждения в беседах и переписке Ф.Э. Молина со швейцарским математиком А. Гурвицем в 1899 г.

Наряду с научными занятиями Ф.Э. Молин увлекался шахматами. В 1895 г., читая курс теории вероятностей, Ф.Э. Молин написал работу «К теории распределения призов в турнирах», сохранившуюся в рукописи. К 1897–1898 гг. относится переписка Ф.Э. Молина с М.И. Чигориным.

Несмотря на получение ученой степени доктора чистой математики в 1892 г. и на признание его работ в математическом мире, Ф.Э. Молин оставался доцентом Юрьевского (Дерптского) университета до 1900 г.

Среди мотивов, по которым кандидатура Ф.Э. Молина на должность профессора несколько раз была отклонена в пользу других кандидатов, имела место и недооценка значения работ Ф.Э. Молина со стороны ученых, входивших в конкурсные комиссии. Например, в заключении комиссии в Харьковском университете, где Ф.Э. Молин участвовал в конкурсе в 1899 г., написано: «К сожалению, Комиссия (А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Л.О. Струве, М.А. Ковальский) не смогла составить себе самостоятельного суждения о степени оригинальности и научного значения работ г. Молина, так как... работы... относятся к области, с которой, как стоящей в стороне от важнейших научных дисциплин, члены Комиссии знакомы лишь поверхностно... Теория высших комплексных чисел представляет весьма сложное и искусственное построение, вызванное стремлением к известному обобщению понятия о числе, не оправданному насущными потребностями...». Так, даже видные ученые, но представители другого направления в математике не смогли оценить новаторского характера исследований, находившихся вне круга их собственных научных интересов.

В 1900 г. Ф.Э. Молин был назначен ординарным профессором в Томский технологический институт. На решение Ф.Э. Молина поехать на работу в Сибирь, вероятно, оказали влияние существовавшие связи ученых Тартуского (Дерптского) университета с Сибирью. Многие ученые и выпускники Тартуского университета работали в Сибири или участвовали в научных экспедициях в различные районы Сибири. В частности, воспитанник Тартуского университета тех же лет, что и Ф.Э. Молин, П.Х. Кадик после защиты магистерской диссертации в 1885 г. в течение 5 лет был преподавателем математики в Томском реальном училище, а затем, пробыв один год приват-доцентом в Тартуском университете, вновь приехал в Сибирь и работал учителем математики в Красноярской гимназии.

В Томске Ф.Э. Молин занимается прежде всего организацией преподавания математики в институте. Нужно было определить объем математических знаний для различных специальностей в институте, разработать программы и курсы лекций, организовать практические занятия со студентами, составить руководства по читаемым курсам и сборники задач и т.д. Ф.Э. Молин был сторонником фундаментальной математической подготовки инженеров. Этим он руководствовался при разработке программ, курсов лекций, сборников задач для различных факультетов Томского технологического института. Высокая квалификация выпускников института в значительной степени определялась их серьезной математической подготовкой. В институте был введен регулярный практикум по решению задач, что являлось педагогическим новшеством в то время. Ф.Э. Молин подготавливает и издает свои курсы лекций по дифференциальному и интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям, издает ежегодные сборники задач, систематически подобранных к читаемому им курсу. Большое внимание уделяет Ф.Э. Молин созданию математического кабинета и математической библиотеки в институте.

Увлеченный разносторонней педагогической деятельностью, Ф.Э. Молин в этот период не публиковал новых результатов своих алгебраических исследований. Ежегодно выходили литографированные курсы лекций и сборники задач, требовавшие от автора постоянной работы по их совершенствованию. В течение двух лет Ф.Э. Молин был деканом инженерно-строительного отделения. В 1910 г. было отмечено 25-летие работы Ф.Э. Молина в высшей школе. В период работы в Томском технологическом институте Ф.Э. Молиным с 1902 по 1909 г. опубликованы следующие курсы лекций и сборники задач:

– Интегральное исчисление. 1902. 191 с. Литогр.
– Исчисление бесконечно малых величин. 1903. 335 с. Литогр.
– Дифференциальное исчисление. 1904. 298 с. Литогр.
– Интегральное исчисление. 1904. 256 с. Литогр.

– Исчисление бесконечно малых величин. Ч. 1. 1904. 231 с. Литогр.

– Интегрирование дифференциальных уравнений. 1904. 400 с. Литогр.

– Курс дифференциального и интегрального исчисления. 226 с. Литогр.

– Курс дифференциального и интегрального исчисления. Ч. 1. 1907. 172 с. Типогр., на правах рукописи.

– Решения задач по исчислению бесконечно малых величин за 2-й семестр 1906/07 учебного года, проведенные Ф.Э. Молиным. 1907.

– Дифференциальные уравнения. Лекции 4-го семестра 1907/08 учебного года. 1908. 190 с. Литогр.

– Дифференциальное и интегральное исчисление. Ч. 2. Лекции 2-го семестра 1907/08 учебного года. 1909. 203 с. Литогр.

– Исчисление бесконечно малых величин. Ч. 2. 1909. Литогр.

В 1911 г. профессор Ф.Э. Молин, известный своей оппозиционностью к царскому правительству и солидарностью с революционными настроениями студентов, под предлогом выслуги лет (25 лет работы в высшей школе) был уволен в отставку с присвоением звания заслуженного профессора. Документ о присвоении звания был задержан на два года попечителем учебного округа. Эта «задержка» лишила Ф.Э. Молина прав и преимуществ, связанных со званием заслуженного профессора, в частности права продолжения преподавания в институте. Произвол, допущенный в отношении Ф.Э. Молина, получил осуждение со стороны прогрессивной печати. Петербургская газета «Речь» по этому поводу писала в 1913 г. следующее: «Совершенно случайно открылась любопытная деталь из порядков, царящих в ведомстве народного просвещения. Деталь эта довольно характерна. Она ясно показывает, как ближайшие сотрудники министра относятся к правам не только учащихся, но и заслуженных преподавателей».

Оказавшись вне института, Ф.Э. Молин организовал частным образом первый в Сибири научный семинар по математике, в котором принимали участие преподаватели и научные работники Томского технологического института. В этот период Ф.Э. Молин принимает участие в работе 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики.

Весной 1914 г. Ф.Э. Молин был приглашен для чтения цикла обзорных лекций по арифметике и алгебре на общеобразовательных курсах для народных учителей в Уфе. Сохранившиеся в архиве ученого материалы этих лекций позволяют судить об оригинальности построения курса, отбора материала и способа изложения. Программа курса содержит семь основных разделов: исторический очерк развития арифметики и алгебры, основы алгебры, основы общей арифметики, задачи арифметики рациональных чисел, задачи алгебры рациональных величин, алгебраическая теория иррациональных величин, арифметическая теория иррациональных чисел. В построении курса получили яркое выражение научные интересы лектора. Изложение весьма обширного материала (системы счисления, теория делимости, уравнения первой и второй степени, рациональные и иррациональные числа, непрерывные дроби, двучленные уравнения, некоторые трансцендентные уравнения, логарифмы и т.д.) связано с развитием понятия числа и алгебраических операций. Эти материалы не содержат полного курса лекций, а представляют собой рукописные заметки лектора по многим разделам программы. Освещение широкого круга вопросов элементарной арифметики и алгебры с единой точки зрения крупного ученого-специалиста заслуживает внимания методистов математики и дальнейшего изучения.

В конце 1914 г. Ф.Э. Молин стал профессором Сибирских высших женских курсов в Томске, где в течение нескольких следующих лет читал курс дифференциального и интегрального исчисления.

§ 3

Как уже было отмечено выше, с момента открытия Томского технологического института в нем начал работать преподавателем математики Владимир Леонидович Некрасов.

В.Л. Некрасов родился в 1864 г. В 1887 г. окончил физико-математический факультет Казанского университета со степенью кандидата математики. Следующие 5 лет он провел на военной службе, а затем преподавал математику в средних учебных заведениях Казани. В 1889 г. им была опубликована заметка «О второй вариации» [129], а позднее статья «О соотношении между изводными и производной при конечных границах». В 1898 г. В.Л. Некрасов выступал на X съезде естествоиспытателей и врачей с сообщением «К теории функций действительной переменной» [130]. После сдачи магистерского экзамена по математике и двух пробных лекций Некрасов получил права приват-доцента. В Казанском университете он читал курсы лекций по дифференциальному исчислению, теории пределов, теории функций действительного переменного и проводил практические занятия по аналитической геометрии и интегральному исчислению.

В Томске В.Л. Некрасов начинает чтение курсов по аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению и теоретической механике.

В 1901 г. выходят литографированные курсы лекций В.Л. Некрасова по дифференциальному исчислению [138] и теоретической механике [137]. В последующие годы работы В.Л. Некрасова в Томске были изданы его литографированные курсы лекций по дифференциальному и интегральному исчислению (1904 г.) [142, 143], приближенному вычислению интегралов (1904 г.) [144]; неоднократно издавался его курс лекций по аналитической геометрии [139–141], на чтении которого В.Л. Некрасов специализировался. После утверждения В.Л. Некрасова в 1901 г. в должности исполняющего обязанности экстраординарного профессора ему предоставляется заграничная длительная командировка в связи с подготовкой магистерской диссертации. Во время этой командировки В.Л. Некрасов посетил города Галле, Кенигсберг, Геттинген, Берлин, Пизу, где познакомился с новейшими работами по теории множеств и теории функций действительного переменного. Результатом этих занятий явилась книга В.Л. Некрасова «Строение и мера линейных точечных областей» [131], изданная в Томске в 1907 г. Это была первая на русском языке книга по теории множеств. Известная книга профессора Московского университета И.И. Жегалкина «Трансфинитные числа» вышла в 1908 г. Книга была представлена В.Л. Некрасовым в качестве магистерской диссертации. Защита состоялась 4 октября 1908 г. в Московском университете. Печатание книги В.Л. Некрасова затянулось почти на три года, в основном она была написана в 1904 г. Книга состоит из четырех глав. Термин «область» употребляется В.Л. Некрасовым в смысле «множество» (Menge).

В первой главе дан достаточно полный исторический очерк развития теории множеств, в особенности теории строения и меры. К началу XX в. теория точечных множеств уже представляла собой самостоятельный раздел математики со своими задачами и методами. Сильно расширялся круг применений теории множеств в других разделах математики. Появились первые систематические изложения теории множеств.

В связи с развитием теории функций на теоретико-множественной основе Э. Борель в 1898 г. в «Лекциях по теории функций» большое место уделяет изложению основ теории множеств. В следующие годы появляются обзоры А. Шенфлиса, посвященные теории множеств, в немецкой математической энциклопедии и ежегоднике Немецкого математического общества. Обзоры А. Шенфлиса систематизировали результаты и методы теории множеств с целью популяризации этой теории.

Работа В.Л. Некрасова в некоторой степени примыкает к работам А. Шенфлиса, дополняя их историческим очерком развития теории множеств и обзором более новых работ. Работа А. Шенфлиса «Развитие учения о точечных многообразиях» содержала многочисленные исторические замечания, но не давала ясного представления о последовательности исторического развития учения о множествах. При изложении работ, не вошедших в обзоры А. Шенфлиса, В.Л. Некрасов вносит некоторые изменения в доказательства теорем, формулировки и определения, а также добавляет новые теоремы и предложения. Ввиду задержки печатания книги автору пришлось дать дополнительный обзор литературы по теории точечных множеств, доведя его до 1907 г. Это дополнение составило третью главу книги. Исторический очерк дополняет обширный список литературы по теории множеств. До появления в 1928 г. книги А. Френкеля «Введение в теорию множеств», в которой библиография доведена до 1928 г., библиография В.Л. Некрасова была наиболее полной. В историческом обзоре появляется стремление автора отделить теорию точечных множеств от абстрактных множеств.

Вторая глава содержит собственные исследования В.Л. Некрасова по теории строения линейных множеств. В.Л. Некрасов изучает, прежде всего, три типа размещения и показывает, каким образом с помощью конечных или трансфинитных комбинаций этих типов получаются множества возрастающей сложности со строением, вполне характеризуемым их типом размещения. Результаты исследования для зам- кнутых множеств завершаются теоремой, вполне вскрывающей строение этих множеств. Соответствующая теорема гласит, что «всякая замкнутая область может быть построена как область невнутренних точек ряда интервалов некоторого определенного типа». Автору удается получить характеристику типа размещения для некоторых незамкнутых множеств. Теория типов размещения применяется В.Л. Некрасовым для изучения разрывных функций действительного переменного. Разрывная функция характеризуется типом размещения ее точек разрыва. Вторую главу автор считает главной частью книги. Четвертая глава книги содержит учение о мере множеств. В этой небольшой по объему главе автор дает в систематическом виде изложение результатов по теории меры, разработанной в трудах А. Лебега и В. Юнга. В своем изложении В.Л. Некрасов следует, главным образом, за В. Юнгом. Решение вопроса об измеримости произвольного множества В.Л. Некрасов связывает с исследованием некоторого незамкнутого множества, называемого им элементарной областью. По первоначальному плану В.Л. Некрасов предполагал включить в книгу и исследования по теории двухмерных множеств, которыми он занимался, но эти результаты не были опубликованы.

Применение понятия о типах размещения было дано В.Л. Некрасовым в статье «Адхеренции и кохеренции линейной точечной области» [132], опубликованной в «Известиях Томского технологического института» за 1908 г., в которой изучается строение производных множеств. Для любого множества адхеренция E_a состоит из изолированных точек множества E, а кохеренция E_c составлена из предельных точек.

После защиты магистерской диссертации В.Л. Некрасов в 1909 г. утверждается исполняющим обязанности ординарного профессора. С открытием в Томске Сибирских высших женских курсов В.Л. Некрасов читает на них математические курсы. В 1917 г. В.Л. Некрасов переходит на работу в Томский университет. Умер В.Л. Некрасов в 1922 г.

Составленный В.Л. Некрасовым по лекциям «Курс аналитической геометрии» в течение двух десятилетий служил основным пособием для томских студентов. В связи с совершенствованием курса аналитической геометрии появились работы В.Л. Некрасова по теории определителей и теории кривых второго порядка. В заметке «Об одном свойстве родственных определителей» [134] доказываются две теоремы об определителях, когда из четырех родственных определителей два обращаются в нуль. (Родственные определители рассматриваемого типа встречаются в аналитической геометрии при решении задачи о пересечении трех плоскостей.) Заметка напечатана в «Известиях Томского технологического института» за 1913 г. В 1916 г. появилась работа В.Л. Некрасова [135] об определении фокусов и директрис кривой второго порядка по ее общему уравнению. К этому же кругу работ научно-методического характера относятся публикации В.Л. Некрасова по сфе- рической тригонометрии. В 1912 г. была издана книга «Основания сферической тригонометрии. Ч. 1: Теория» [136]. В 1911 г. была издана работа «Построение треугольников на сфере» [133], где излагаются решения задач на построения на сфере при помощи только сферического циркуля. Автор дает несколько теорем сферической тригонометрии и указывает способы построения треугольников на сфере для различных случаев.

Из более ранних работ В.Л. Некрасова можно отметить его заметку «О второй вариации» [129], в которой методом, принадлежащим В.В. Преображенскому, получено выражение для второй вариации интеграла

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, y'\right) dx$$

в виде

$$\delta^2 V = \left|\begin{matrix} y' & y \\ \delta y' & \delta y \end{matrix}\right|_{x_0}^{x_1} \frac{\delta y}{y} f''_{y'y'} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{y^2} \left|\begin{matrix} y & y' \\ \delta y & \delta y' \end{matrix}\right|^2 f''_{y'y'} dx.$$

Наиболее интересными являются исследования В.Л. Некрасова по теории множеств. Исторический очерк развития теории точечных множеств сохранил свою ценность и до настоящего времени, несмотря на появление ряда новых работ по истории теории множеств.

§ 4

С 1905 по 1916 г. профессором по кафедре механики в Томском технологическом институте был Владимир Петрович Алексеевский.

В.П. Алексеевский родился в 1858 г. в Новгородской губернии. Среднее образование получил в Нижегородской гимназии. По окончании гимназии В.П. Алексеевский поступает в Харьковский университет, с которым связана значительная часть его жизни. Здесь он был студентом, приват-доцентом и профессором до переезда в Томск. В 1892 г. он выдержал магистерский экзамен и в качестве диссертации на степень магистра чистой математики представил работу «О функциях подобных функции гамма», защита которой состоялась 21 февраля 1893 г. В 1894–1895 гг. В.П. Алексеевский находился в заграничной командировке. Ко времени его пребывания в Лейпциге относится опубликование статьи, доложенной С. Ли и представляющей изложение диссертации и дальнейших исследований В.П. Алексеевского в этой области. В 1904 г. В.П. Алексеевский был утвержден исполняющим обязанности экстраординарного профессора Харьковского университета. В октябре 1905 г. В.П. Алексеевский становится исполняющим обязанности ординарного профессора по кафедре механики Томского технологического института. В ноябре 1907 г. он был избран директором института и оставался в этой должности до июня 1911 г. В последующие годы он был председателем профессорского суда. Умер В.П. Алексеевский 13 мая 1916 г. в Томске.

Математик по образованию и по своим научным интересам, В.П. Алкссеевский вел курс теоретической механики.

Научные интересы В.П. Алексеевского складывались в Харьковском университете в период деятельности там В.Г. Имшенецкого и К.А. Андреева. В год окончания университета со званием кандидата В.П. Алексеевским была опубликована, по-видимому, первая работа «Заметка об обобщении уравнения Риккати» («Сообщения математического общества» при Харьковском университете, 1884 г.). В заметке решается задача о нахождении уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 + R = 0,$$

интеграция которого возможна, исходя из условий интегрируемости уравнения Риккати, конечным числом квадратур. Эта работа явилась развитием исследований московского профессора А.В. Летникова об отыскании условий интегрируемости конечным числом квадратур уравнений указанного выше вида, из которых при частных допущениях получается уравнение Риккати, и другие.

Дальнейшие работы В.П. Алексеевского посвящены созданию теории гаммаморфных функций. Результаты этих исследований опубликованы в ряде статей с 1889 по 1902 г. и в магистерской диссертации В.П. Алексеевского. К введению новых функций В.П. Алексеевский пришел от известной зависимости между Г-функцией и синусом, пытаясь рассмотреть аналогичную зависимость для функции Θ_1 Якоби. Руководствуясь аналогией с функцией $\Gamma(x)$, В.П. Алексеевский пришел к рассмотрению функций, общий вид корней которых $m\omega + n\omega'$, где m и n – целые отрицательные числа, а ω и ω' – периоды эллиптических функций. Для изучаемых функций, которые обозначаются $H(x)$, было получено характеристическое функциональное уравнение

$$H(x+1)=\Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right)H(x),$$

где

$$\alpha=\frac{\omega'}{\omega}\cdot$$

Приведенное равенство может быть положено в основу построения теории нового класса функций. Так и поступает В.П. Алексеевский. Для $\alpha = 1$ вводится обозначение функции $G(x)$. Значительная часть работы посвящена изучению свойств функции $G(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$G(x+1)=\Gamma(x)G(x),$$

при условии

$$G(1)=1\cdot$$

Для функции $G(x)$ дано интегральное представление $\log G(x)$, получено дифференциальное уравнение, устанавливающее связь этой функции с функцией $\mathrm{G}(x)$, выведены различные формы разложения в ряды и бесконечные произведения, установлены формулы удвоения аргумента, получены формулы, аналогичные формулам Коши, Раабе и Стирлинга. В качестве применения новой функции указаны вычисления некоторых определенных интегралов, в частности, обобщение формулы Раабе:

$$\int_0^x \log\Gamma(u+a)du=\log\frac{\Gamma^{x+a-1}(x+a)G(a)}{\Gamma^{a-1}(a)G(x+a)}-\frac{x(x+2a+1)}{2}+\frac{x}{2}\log 2\pi,$$

из которой формула Раабе получается при $x = 1$, и вычисления интегралов вида

$$\int_0^x \log\sin\pi x\,dx\cdot$$

Рассматривается также решение функционального уравнения

$$F\left(x+\alpha\right)=\cos\frac{\pi x}{\alpha}F\left(x\right).$$

Далее вводятся функции

$$\log G_n\left(x\right)=\Delta^{-n}\log x=\underbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}_{n\ \text{раз}}\log x\left(dx\right)^n$$

при условии $\log G_n(x)=0$.

В частности, для $n=1$, 2 получим

$$\log G_1\left(x+1\right)=\log\Gamma\left(x+1\right),$$
$$\log G_2\left(x+1\right)=\log G\left(x+1\right).$$

В конце работы рассматриваются некоторые свойства функций $H(x,\alpha)$. В работе устанавливается, что функции Гейне, Якоби и, следовательно, эллиптические выражаются рационально через функции, подобные гамма-функции. В более позднем мемуаре 1902 г. изучается зависимость между кин-келиновыми и гамма-морфными функциями, а также между гамма-морфными функциями и функциями Бопена. В этой работе приводятся и некоторые новые результаты В.П. Алексеевского по теории гамма-морфных функций. Исследования В.П. Алексеевского получили сразу заслуженно высокую оценку со стороны ряда ученых. В.А. Стеклов по поводу работ В.П. Алексеевского писал: «Из этого короткого обзора видна значительность результатов, полученных В.П. Алексеевским. В этих своих исследованиях В.П. Алексеевский выступил уже, как видим, серьезным ученым, установившим прочно свое научное достоинство». Как уже отмечено, в 1894 г. С. Ли доложил о работах В.П. Алексеевского Лейпцигской академии.

В 1896 г. результаты В.П. Алексеевского были изложены бельгийским ученым Бопеном, причем им введен термин «функция Алексеевского». В 1899 г. в работе англичанина Э.В. Барнса исследования В.П. Алексеевского были изложены под названием теорем Алексеевского. Работы В.П. Алексеевского по теории гамма-морфных функций были продолжены другими учеными (Бопен, Э.В. Барнс, В.А. Стеклов).

В 1895 г. появилась работа В.П. Алексеевского «Об автоморфной функции, аналогичной экспонентной». В этой работе решается следующая задача: определить функцию $F(x)$, обладающую свойствами:

1) при всех линейных преобразованиях независимого переменного x, составляющих группу, имеет место равенство

$$F\left(\frac{\alpha_i x+\beta_i}{\gamma_i x+\delta_i}\right)=F(x);$$

2) для некоторой функции z переменных x и y выполняется равенство

$$F(z)=F(x)F(y).$$

В качестве применения полученного класса функций указывается возможность интегрирования дифференциального линейного уравнения с переменными коэффициентами определенного вида.

В заметке 1898 г. «О законе взаимности простых чисел» дается более простое доказательство закона взаимности, примыкающее по идее к работам Ф. Эйзенштейна, Э. Шеринга и Л. Кронекера. Известен литографированный курс лекций В.П. Алексеевского «Интегрирование дифференциальных уравнений», изданный в Харькове в 1901 г. Основной научной заслугой В.П. Алексеевского являются введение в науку и детальная разработка теории гамма-морфных функций. Об этих работах В.П. Алексеевского говорится в диссертации и статье В.В. Гуссова [80] по истории трансцендентных функций в России.

§ 5

Преподавателями математики в Томском технологическом институте начинали свою деятельность Василий Иванович Шумилов (1877–1955) и Владимир Петрович Зылев (1883–1952), выпускник Казанского университета.

В.И. Шумилов учился в Духовной семинарии, сдал экстерном экзамены в Тобольской гимназии и поступил в Санкт-Петербургский университет на естественное отделение, а затем перешел на математическое. В студенческие годы активно участвовал в общественной жизни, несколько раз его арестовывали за участие в революционных организациях. После окончания университета в 1907 г. преподавал математику в гимназии Бельцы, с 1908 г. в Томске – в Учительском институте и коммерческом училище, а с 1909 г. – в технологическом институте, с 1911 по 1918 г. – на Сибирских высших женских курсах и с 1918 г. – в университете по совместительству сначала преподавателем, а затем профессором. В этот период некоторое время он находился в научной заграничной командировке в Берлине и Гейдельберге.

В.И. Шумилов был автором ряда популярных статей по физике, математике и методике преподавания. В начале 20-х гг. В.И. Шумилов активно включился в новую политическую жизнь, став членом ВКП (б). После 1925 г. В.И. Шумилов был профессором ряда московских вузов, среди которых Институт стали и сплавов.

В.П. Зылев с 1911 г. был штатным преподавателем Томского технологического института по руководству практическими занятиями по математике и механике, преподавал на Сибирских высших женских курсах. В 1920 г. был первым заведующим Томским рабфаком. В 1921 г. он перевелся в Омск, а затем в Москву, где заведовал кафедрой математики в Институте железнодорожного транспорта. Некоторое время занимал должность заместителя председателя Главнауки. В Томске В.П. Зылевым опубликованы научные заметки, в которых изучаются свойства матриц и определителей. Он занимался вопросами приближенного решения систем линейных алгебраических уравнений, издал пособия по сферической тригонометрии и статистике. В 1936 г. В.П. Зылев был утвержден в ученой степени кандидата физико-математических наук без защиты диссертации.

Кратковременным было пребывание в Томске Н.Н. Салтыкова. Н.Н. Салтыков (р. 1871) по окончании математического отделения Харьковского университета был оставлен при университете для «приготовления к профессорскому званию» и в декабре 1899 г. защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции». Через несколько дней после защиты он договаривается с профессором Е.Л. Зубашевым о возможной работе в Томске. И следующие два года проводит в заграничной командировке. В сентябре 1901 г. Н.Н. Салтыков зачисляется экстраординарным профессором по кафедре теоретической механики, но читает курсы лекций и по математике. Еще до своего приезда в Томск им было опубликовано более 10 научных статей, среди которых «Обобщение первого способа Якоби интегрирования уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции», «Разыскание интегралов, общих задачам о равновесии гибкой нерастяжимой нити».

Через полгода пребывания в Томске Н.Н. Салтыков подает прошение о предоставлении ему заграничной командировки с целью работы над докторской диссертацией. В начале 1904 г. он переводится в Киевский политехнический институт.

Исключительно большое внимание Ф.Э. Молин и В.Л. Некрасов уделяли формированию математического отдела библиотеки Томского технологического института. Деятельное участие в этом принимал и Н.Н. Салтыков, который, находясь за границей, ознакомился с работой библиотек Геттингенского университета, Сорбонны в Париже, что содействовало комплектации математической библиотеки института.

С 1902 г. преподавателем на кафедре прикладной механики Томского технологического института был Степан Проклович Гомелля (р. 1875), в 1913 г. он защитил магистерскую диссертацию, с мая 1918 г. – приват-доцент, с 1920 г. – профессор. По совместительству профессор кафедры чистой математики и механики в Томском университете.

В «Известиях Томского технологического института» за 1911 г. С.П. Гомелля опубликовал заметку «К вопросу о построении проекции взаимных пересечений поверхностей вращения второго порядка» [176].

Занятия по математике и механике в Томском технологическом институте вел также Михаил Николаевич Иванов, позднее профессор. От Томского технологического института М.Н. Иванов был направлен в заграничную командировку в Геттинген. В 1916 г. в Томске была издана книга М.Н. Иванова «О малых колебаниях материальной системы около положения равновесия» [187], в которой М.Н. Иванов дает изложение принадлежащей Лагранжу теории малых колебаний материальной системы с учетом более поздних исследований и распространением этой теории на неголономные системы. В работе рассматриваются механические системы с консервативными силами с допущением неголономных связей, но при условии, что время не входит явно в уравнения связей. При изучении малых колебаний около положения устойчивого равновесия он ограничивается в уравнениях дифференциальных связей только линейными членами относительно производных, что позволяет произвести интегрирование уравнений дифференциальных связей. Для интегрирования системы дифференциальных уравнений движения рассматриваемых систем М.Н. Ивановым предложен метод, состоящий в преобразовании уравнений движения к уравнениям гармонического типа.

Большое внимание в работе М.Н. Иванова уделено доказательству вещественности корней детерминанта полученной системы уравнений. Одновременно в работе указывается путь эффективного вычисления корней этого детерминанта, а также нахождения координат системы в случае простых и кратных корней.

В 1910 г. в Томске были открыты Сибирские высшие женские курсы с математическим отделением (с 1911 г.). Преподавание математики там осуществляли работники Томского технологического института: профессор Ф.Э. Молин, профессор В.Л. Некрасов, В.П. Зылев, В.И. Шумилов.

Сибирская пресса, городское самоуправление, сибирские общественные деятели вновь и вновь поднимали вопрос об организации в университете новых факультетов. Но министерство просвещения царской России вплоть до 1917 г. отклоняло просьбы совета университета и требования сибирской общественности.

Таким образом, период 1900–1917 гг., рассмотренный в первой главе, характеризуется началом деятельности ученых-математиков в Томске в связи с открытием Томского технологического института и Сибирских высших женских курсов.

Первые профессора математики в Томске Ф.Э. Молин, В.Л. Некрасов и В.П. Алексеевский провели большую организационную работу по постановке преподавания математических курсов и обеспечили высокий уровень преподавания математики в указанных высших учебных заведениях.

Научные исследования Ф.Э. Молина, проведенные им еще до его приезда в Томск, получили мировое признание и послужили основой для развития некоторых разделов современной алгебры. Работы В.П. Алексеевского, также выполненные до его приезда в Томск, явились важным моментом в развитии теории специальных функций. Книга В.Л. Некрасова, изданная в Томске, была первой русской книгой по теории множеств.

2. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ТОМСКЕ с 1917 по 1945 г.

§ 1

Революционные события 1917 г. ускорили решение вопроса об открытии физико-математического факультета в Томском университете. Он был открыт 1 июля 1917 г. На новом факультете было решено организовать три новые кафедры: чистой математики, теоретической и практической механики, астрономии и геодезии. На факультете были созданы два отделения: физико-математическое и естественно-научное. Первым деканом физико-математического факультета был избран профессор физики А.П. Поспелов. Большую организационную работу на физико-математическом отделении начал профессор В.Л. Некрасов.

Перестройка научной и учебной деятельности высших учебных заведений в Томске проходила в напряженных и тяжелых условиях революции и гражданской войны. На физико-математическое отделение осенью 1917 г. было принято свыше 100 студентов. Позднее на физико-математический факультет были зачислены многие бывшие слушательницы Сибирских высших женских курсов, закрытых в 1920 г.

Для работы на математических кафедрах Томского университета в первую очередь были приглашены профессора и преподаватели Томского технологического института Ф.Э. Молин, В.Л. Некрасов, М.Н. Иванов, а затем и из других городов.

Отстраненный в 1911 г. от работы в Томском технологическом институте профессор Ф.Э. Молин после Февральской революции вернулся в институт. От имени совета института профессор И.И. Бобарыков, известный инженер-механик, обратился к Ф.Э. Молину 5 апреля 1917 г. со следующим письмом: «Милостивый государь Федор Эдуардович! Совет Томского технологического института постановил приветствовать Вас по случаю поворота в жизни страны и выразить сожаление о преждевременном Вашем уходе из коллегии. Вместе с тем Совет надеется видеть Вас вновь в своей среде. Исполняя с особым удовольствием поручение Совета, имею честь просить Вас при изменившихся обстоятельствах возобновить Вашу академическую деятельность в институте».

Через несколько месяцев, как уже отмечено выше, был решен вопрос об открытии в Томском университете физико-математического факультета, о создании которого Ф.Э. Молин давно мечтал и заботился. Создавая математическую библиотеку в Томском технологическом институте и проводя научный семинар по математике, Ф.Э. Молин имел в виду потребности будущего физико-математического факультета университета. В 1918 г. Ф.Э. Молин становится профессором Томского университета, где он и проработал до последних дней своей жизни.

В первые годы существования физико-математического факультета некоторое время в числе преподавателей были сотрудники Пермского и Казанского университетов. Среди них будущие академики: математик И.М. Виноградов, астроном Г.А. Шайн, Р.О. Кузьмин, Н.И. Порфирьев, а также профессор К.Д. Покровский.

Николай Иванович Порфирьев (1863–1930) с частью Казанского университета был эвакуирован в Томск в 1918 г. и утвержден профессором кафедры чистой математики в 1920 г. Он читал лекции по сферической тригонометрии и введению в курс математического анализа. Увлеченно знакомил студентов с разработкой классических теорий математического анализа, пытался применить гармонический анализ к исследованию звуковых колебаний. В конце 1920 г. вернулся в Казань.

§ 2

За 23 года работы в университете Ф.Э. Молин читал многие математические курсы, проводил студенческие и научные семинары по различным вопросам математики, руководил дипломными работами студентов, вел занятия с аспирантами. В течение более четверти века Ф.Э. Молин оставался наиболее квалифицированным математиком Сибири, хотя круг математиков в высших учебных заведениях Томска и других городов Сибири расширялся.

Почти все студенты и научные работники – математики и многие физики как университета, так и других высших учебных заведений Томска – работали в математических семинарах профессора Ф.Э. Молина.

Темой семинаров чаще были теория поверхностей и теория эллиптических функций. Тематика семинаров соответствовала подготовке и интересам участников. В течение ряда лет Ф.Э. Молин руководил отделом в Научно-исследовательском институте математики и механики и был ответственным редактором «Известий» этого института.

В те же годы Ф.Э. Молин работал профессором в Томском педагогическом институте и возглавлял в нем ежегодно государственную экзаменационную комиссию. Ф.Э. Молин был членом нескольких научных обществ, участником математических съездов и конгрессов. В 1927 г. был членом президиума Математического съезда в Москве.

В дни празднования 50-летия Томского университета в 1934 г. профессору Ф.Э. Молину было присвоено почетное звание заслуженного деятеля науки РСФСР. Умер Ф.Э. Молин 25 декабря 1941 г. в Томске.

В томский период жизни, наряду с громадной педагогической и организационной работой, Ф.Э. Молин продолжал научные исследования по алгебре, алгебраической геометрии, теории функций, некоторым прикладным вопросам. Некоторые полученные результаты были опубликованы, а значительная часть сохранилась в незавершенных рукописях и многочисленных заметках.

В заметке «О некоторых трансцендентных уравнениях» [125], опубликованной в 1930 г., рассматривается пример трансцендентного уравнения, решением которого является некоторое алгебраическое число, причем не все сопряженные с ним алгебраические числа удовлетворяют ему. В 1934 г. Ф.Э. Молин опубликовал в [126] решение одной алгебраической задачи, предложенной болгарским математиком Л. Чакаловым: доказать, что уравнение

$$(x+1)^{65}(x-2)^{65}+\alpha(x+\alpha)^{65}(x-2\alpha)^{65}+\beta(x+\beta)^{65}(x-2\beta)^{65}+(3x)^{65}=0,$$

где α и β – примитивные корни третьей степени из единицы, может быть полностью решено в радикалах.

В статье «Системы высших комплексных чисел с одной главной единицей» [127] Ф.Э. Молин обращается к тематике своих прежних фундаментальных работ. В статье показывается, что каждая система высших комплексных чисел изоморфна системе с одной только главной единицей. Работа содержит начало систематики рассматриваемых числовых систем. В последней опубликованной работе «Об одном преобразовании гипергеометрической строки» [128] осуществлено аналитическое продолжение функции, заданной гипергеометрическим рядом, за пределы круга сходимости данного степенного ряда. В последние годы Ф.Э. Молин много занимался теорией гипергеометрической функции. Сохранилась его почти законченная рукопись, содержащая систематический обзор теории гипергеометрической функции.

Среди неопубликованных материалов научного архива Ф.Э. Молина прежде всего можно выделить рукописи по теории представления групп Галуа. В работах по представлению групп автор намеревался определить различные линейные группы с линейной группой параметров, для которой данная группа Галуа является подгруппой с дискретными значениями параметров.

В одной из заметок, представляющей почти законченную статью, ставится цель дать «полное представление группы Галуа в виде неприводимых групп подстановок». В указанных рукописях Ф.Э. Молин развивает результаты и методы своих работ, опубликованных в 1897 г. В рукописи незаконченной статьи об интерпретации геометрии Лобачевского показывается, что для известного отображения пространства Лобачевского на внутренность шара в евклидовом пространстве достаточно элементарных методов. В другой рукописи рассматриваются взгляды Лобачевского о месте геометрии среди естественных наук. Ряд заметок научно-методического характера посвящен вопросам изучения алгебраических кривых с помощью тангенциальных координат, теории кривых третьего порядка и их точек перегиба, теории взаимнооднозначных преобразований двух плоскостей друг на друга (в частности, рассмотрена теория преобразований Кремоны).

В архиве имеется очень большое число листов с вычислениями, по-видимому, относящихся к теории чисел. Материалы архива позволяют проследить работу Ф.Э. Молина над опубликованными статьями. В архиве имеются многочисленные материалы для характеристики педагогической деятельности Ф.Э. Молина: программы прочитанных лекций и проведенных семинаров, материалы лекций и т.п. В архиве сохранились некоторые материалы, позволяющие установить широкие научные связи Ф.Э. Молина с рядом выдающихся математиков конца XIX – начала XX в.: значительное число авторских оттисков работ В.Г. Алексеева, П. Боля, Н.В. Бугаева, А. Гурвица, М. Дена, Ф. Клейна, А. Кнезера, Л. Кронекера, Л.К. Лахтина, Г. Минковского, Г. Морера, П.А. Некрасова, Э. Студи, Ф.Г. Фробениуса, Ф. Шура, Ф. Энгеля и других; на значительном числе оттисков имеются авторские надписи; среди писем к Ф.Э. Молину обнаружены письма В. Виртингера, А. Гурвица, Ф. Клейна, А. Кнезера, Г. Пика, М. Тихомандрицкого, Л. Струве, Ф.Г. Фробениуса, Ф. Шура. В письмах Ф.Г. Фробениуса, Ф. Шура, А. Гурвица дается высокая оценка научным трудам Ф.Э. Молина. В письме М. Тихомандрицкого также отмечаются научные заслуги Ф.Э. Молина.

Для изучения жизни и деятельности Ф.Э. Молина несомненную ценность представляют сохранившиеся биографические и мемориальные материалы: дипломы, сообщения об избрании его членом научных обществ (в частности, сообщение об избрании 15 сентября 1892 г. действительным членом Московского математического общества), официальная и частная переписка, различные материалы, характеризующие пребывание Ф.Э. Молина в научных командировках в Лейпциге (1883–1885), Москве (1892), Риме (1899–1900) и другие. Среди этих материалов можно назвать заметки, относящиеся к работе Ф.Э. Молина в Лейпцигском семинаре Ф. Клейна по теории эллиптических функций, и заметки по истории математики, сделанные в Риме.

§ 3

В период начала восстановления народного хозяйства страны происходила и решительная перестройка научной и учебно-воспитательной работы в высших учебных заведениях. С укреплением и ростом университета и других высших учебных заведений Томска укрепляются кадрами и математические кафедры. Профессорами университета и технологического института становятся В.А. Малеев, Н.Н. Горячев, В.И. Шумилов, М.Н. Иванов. Практические занятия по математике вела Н.А. Никольская, окончившая в 1917 г. Высшие женские курсы в Петрограде.

Начиная с 1922 г. коллектив томских математиков начинает пополняться воспитанниками Томского университета. Среди первых выпускников университета по математической специальности, начавших в те годы научную и педагогическую деятельность, были Е.Н. Аравийская, Л.С. Богословская, М.А. Дунина, В.А. Соколова.

Среди студентов Томского университета в те годы был Ф.П. Отрадных (1900–1955), впоследствии доцент Ленинградского университета, специалист по истории математики.

Наряду с организацией преподавания в университете начинают работать научные семинары и проводятся исследования по ряду вопросов алгебры, геометрии и математического анализа. Наиболее активными были семинары профессора Ф.Э. Молина.

Некоторые результаты исследований, проведенных в геометрическом семинаре Ф.Э. Молина, были опубликованы в 1924 г. в «Известиях Томского государственного университета». В статье [152] Е.Н. Аравийской изучается вопрос о геодезическом изображении поверхностей. В работе доказывается, что если уравнение геодезических линий имеет первый интеграл вида

$$\left(\varphi_2 \left(v'\right)^2 + \varphi\right) + C\left(\phi_2 v' + \phi\right) = 0,$$

то имеется система бесконечного числа поверхностей Лиувилля, геодезически изображающихся одна на другую. Далее доказывается необходимость этого условия. В случае, когда левая часть первого интеграла распадается на линейные множители, один из которых не содержит произвольной постоянной, поверхности могут приводиться к виду С. Ли.

В статье В.А. Соколовой [248] изучаются минимальные поверхности переноса и линии на этих поверхностях. Изучение плоских и пространственных линий переноса позволяет получить представление о минимальной поверхности в целом. В рассматриваемой работе выведены дифференциальные уравнения линий переноса, дано интегрирование этих уравнений с применением эллиптических функций и получены выражения для координат точек поверхности, отнесенной к асимптотическим линиям, через эллиптические и тригонометрические функции. На основании полученных формул проводится исследование асимптотических линий и линий переноса.

В другой работе В.А. Соколовой [249], опубликованной в 1928 г., рассмотрены аффинные преобразования минимальных поверхностей. Результаты исследования показывают, что только минимальные поверхности Шерка инвариантны по отношению к аффинным преобразованиям.

В статье Л.С. Богословской [162] изучаются системы минимальных поверхностей. В работе доказывается, что не существует другой тройной ортогональной системы, в которой участвуют минимальные поверхности, кроме системы минимальных поверхностей вращения с общей осью. Показывается также, что замкнутая поверхность определенного вида, указанная в работе, ортогональная к минимальным поверхностям системы, вырезает на всех минимальных поверхностях равные площади.

Геометрические семинары Ф.Э. Молина положили начало исследованиям томских математиков по дифференциальной геометрии.

§4

Алгебраические исследования в этот период проводил профессор В.А. Малеев, занимавшийся также вопросами теории чисел.

Всеволод Александрович Малеев (1889–1938), воспитанник Казанского университета, проработал в Томске 18 лет и был профессором университета, педагогического института и индустриального института (бывшего технологического, а позднее политехнического). В.А. Малеев был одним из самых популярных лекторов по математике. Его лекции отличались чрезвычайной ясностью и доступностью изложения. Читая на младших курсах основные курсы высшей алгебры, аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, профессор В.А.Малеев помогал студентам уже на первых шагах их обучения в высшей школе выработать математическое мышление, получить твердую основу для изучения других математических предметов.

В течение многих лет В.А. Малеев возглавлял математические кафедры в университете, педагогическом и индустриальном институтах. В.А. Малеев был преподавателем рабочего факультета, основанного в Томском университете с 1 сентября 1920 г.

Научные интересы В.А. Малеева связаны с теорией алгебраических уравнений, вопросами делимости многочленов и теорией сравнений. В работе «К теории уравнений 3-й степени» [216], опубликованной в 1924 г., рассматривается уравнение

$$x^3 + Ax^2 + Bx + 1 = 0,$$

для корней которого получены формулы, применение которых позволяет провести интересное исследование геометрических свойств уравнения, когда коэффициенты A и B – комплексные сопряженные. Каждому уравнению рассматриваемого класса ставится в соответствие точка на плоскости. Уравнение D = 0 представляет на плоскости кривую четвертого порядка и третьего класса – гипоциклоиду с тремя точками возврата. Эта кривая разделяет плоскость на две части. Внутренней области соответствует множество уравнений с неприводимыми решениями. Геометрически удается подробно исследовать свойства корней уравнения.

В цикле статей, опубликованных в 1926–1928 гг., изучаются алгебраические свойства решений сравнения

$$x^{3n} + y^{3n} + z^{3n} - 3x^n y^n z^n \equiv 0 (\operatorname{mod} q),$$

где q есть степень простого делителя некоторого алгебраического выражения. Две статьи из этого цикла были опубликованы в «Известиях Казанского физико-математического общества» [217, 218], одна – в «Известиях Томского государственного университета» [219]. В первых двух статьях изучались групповые свойства указанного сравнения. В третьей статье изучаются композиции решений сравнения, дана классификация решений сравнения и рассмотрены две операции, переводящие решения одного рода в решения другого рода. Далее рассматриваются композиции решений указанного вида, позволяющие получать решения более сложных сравнений.

В более поздних работах В.А. Малеев изучал некоторые вопросы делимости многочленов. В статье [220], опубликованной совместно с А.П. Архангельским, решается задача об определении наименьшего показателя ω, при котором выражение $x^{\omega} - 1$ делится нацело на многочлен по простому модулю p, а в статье, опубликованной совместно с Ю.В. Чистяковым в том же выпуске «Известий Томского индустриального института» [221] (1936), приводится вычисление производных сумм одинаковых степеней корней уравнения по коэффициентам уравнения. В последней публикации [222] В.А. Малеев связывает свои исследования с последней теоремой Ферма.

§ 5

Среди сотрудников Пермского университета, прибывших в Томск в 1919 г., были астрономы, вскоре начавшие работать в Томском университете: профессор К.Д. Покровский, Г.А. Шайн, Н.Н. Горячев.

Профессор Константин Дормидонтович Покровский (1868 г., Н. Новгород – 1945 г., Киев) окончил Московский университет, работал в Пулковской и Юрьевской астрономических обсерваториях, с 1907 г. – экстраординарный профессор Юрьевского университета, а с июля 1917 г. –

ординарный профессор Пермского университета. Его книги «Путеводитель по небу» и «Звездный атлас» получили мировую известность. К.Д. Покровский участвовал в научных экспедициях в Крым и на Алтай. В конце 1919 г. был прикомандирован в должности и.о. профессора по кафедре астрономии и геодезии Томского университета. В 1920 г. он уехал из Томска, позднее стал членом-корреспондентом АН СССР и директором Пулковской обсерватории.

Г.А. Шайн (1892–1956), только что окончивший университет, и Н.Н. Горячев стали научными сотрудниками в обсерватории астрономического кабинета.

Николай Никанорович Горячев родился в 8(20) ноября 1883 г. в Перми, окончил Московский университет по математической специальности в 1905 г. и был оставлен при университете для подготовки к профессорской деятельности под руководством профессора Б.К. Млодзеевского. В 1907 г. сдал магистерские экзамены. Затем работал в Перми учителем математики, а позднее преподавал в Пермском университете.

Свою деятельность в Томске Н.Н. Горячев начал астрономом-вычислителем, одновременно вел практические занятия по математике в университете и технологическом институте. Затем был утвержден доцентом кафедры математики, а позднее профессором астрономии и заведующим кафедрой астрономии в университете. В Томском технологическом институте он был ряд лет профессором кафедры математики. Н.Н. Горячев был видным специалистом по небесной механике, руководил астрономической обсерваторией при Томском университете, где велись систематические наблюдения покрытий звезд Луной и другие наблюдения. Рассматривая научную и педагогическую деятельность профессора Н.Н. Горячева, невозможно не остановиться на характеристике его как математика.

Математик по образованию, Н.Н. Горячев в своих научных исследованиях постоянно имел дело с вычислительной математикой и математической обработкой результатов наблюдений. Подход Н.Н. Горячева к решению астрономических вопросов даже может быть назван вычислительно-математическим. Например, в статье «Способ подыскания Певцовских пар звезд (с каталогами их для Томской обсерватории)» [178] Н.Н. Горячев отмечает, что точность определения широты места зависит от знания точных координат наблюдаемых звезд, которого можно достичь применением довольно простой предлагаемой им вычислительной схемы. Как астроном-вычислитель подходит Н.Н. Горячев и к решению других задач (определение долготы Томской университетской обсерватории по радиосигналам, изучение упругих свойств Земли по данным наблюдений Томской геодинамической станции, использование наблюдений покрытий звезд Луной для внесения необходимых поправок в различные теории движения Луны).

Во всех указанных исследованиях Н.Н. Горячев убедительно показывает, как вычислительные методы позволяют получить весьма надежные результаты при использовании простого и универсального оборудования обсерватории.

В основных научных трудах Н.Н. Горячев развивает новые вычислительные методы. Решение конкретных задач служит для Н.Н. Горячева только иллюстрацией предложенных им методов. В работе «Способ последовательных приближений при уравновешении свободной цепи геодезических четырехугольников» [180] Н.Н. Горячев последовательно излагает способ уравновешения свободной цепи геодезических квадратов. Выбор сети квадратов позволяет дать весьма удобную стандартную вычислительную схему. Получается хорошая быстрота сходимости. Сравнение результатов, полученных по методу Н.Н. Горячева, с результатами, полученными при обработке данных измерений другими методами, говорит в пользу его метода.

В книге «Способ Halphen'a для вычисления вековых возмущений планет и применение его к Церере» (Томск, 1937) [181] Н.Н. Горячев дал значительное улучшение вычислительной схемы, а также устранил ряд ошибок и неточностей в формулах Альфана. Развитая в этой работе Н.Н. Горячевым вычислительная схема позволяет шире применять арифметические вычислительные машины, так как логарифмически-тригонометрические вычисления по таблицам сведены до минимума. Изложение метода Альфана сопровождается рассмотрением ряда чисто математических вопросов из теории специальных функций и дифференциальных уравнений. Сравнение различных методов провели П.М. Алабужев и А.А. Сивков.

Одна научная статья Н.Н. Горячева имеет чисто математическое содержание. Это «Заметка об уравнениях Якоби» [179], опубликованная в «Известиях Томского государственного университета» за 1928 г. (т. 79). В этой статье для дифференциального уравнения Якоби

$$L(xdy - ydx) - Mdy + Ndx = 0,$$

где L, M, N – линейные функции относительно x и y, доказывается существование определяемого квадратурами интегрирующего множителя вида $F(px + qy)$ для одного особого случая.

В течение своей многолетней педагогической деятельности Н.Н. Горячев наряду с астрономическими курсами постоянно читал курсы лекций по математике и механике: общий курс высшей математики, аналитическую геометрию, теоретическую механику, курс приближенных вычислений и другие. Лекции Н.Н. Горячева, благодаря их живости и глубине изложения, пользовались огромной популярностью среди томских студентов. Н.Н. Горячев как лектор относился к представителям классической методики и образцом изложения считал изложение анализа Э. Пикаром и К. Жорданом, аналитической геометрии – Дж. Сальмоном и т.д. С излишней верностью традиционному стилю он воздерживался от использования новых приемов и методов, например избегал векторных обозначений при изложении аналитической геометрии и теоретической механики. Двадцатилетняя деятельность профессора Н.Н. Горячева в Томске (ум. 1940) оставила заметный след в жизни физико-математического факультета Томского университета.

Многие ученики профессора Н.Н. Горячева унаследовали и восприняли его высокую математическую культуру и, являясь астрономами, в своей научной и педагогической деятельности уделяют значительное время и место математическим вопросам.

§ 6

С 1925 по 1937 г. профессором Томского университета был Лев Александрович Вишневский (1887–1938). После окончания Московского университета Л.А. Вишневский с 1918 до 1925 г. работал в Таврическом университете (Ялта, позднее Симферополь). Вместе с известными математиками профессором М.А. Тихомандрицким, профессором Н.М. Крыловым, Н.С. Кошляковым, физиком Я.И. Френкелем и другими Л.А. Вишневский, в то время приват-доцент, входил в инициативную группу по открытию Таврического университета, первоначально как филиала Киевского университета. В 1925 г. Крымский (Таврический) университет был преобразован в педагогический институт. Первые научные исследования Л.А. Вишневского, выполненные в крымский период его деятельности, относятся к теории функций бесконечного числа переменных и вариационному исчислению. В первой печатной работе Л.А. Вишневского, опубликованной совместно с Н.М. Крыловым [169], дается новое доказательство известной теоремы Арцела о компактности множества непрерывных функций, что позволяет получить новое более простое доказательство теоремы Бендиксона о равномерной сходимости последовательности функций и дать обобщение теоремы Бендиксона для последовательностей дифференцируемых функций и интегралов от непрерывных функций. В последней части рассматриваемой работы авторы делают замечание о возможности распространения полученных результатов на множества функционалов, понимаемых как функции линий, поверхностей и т.д. В диссертации «О некоторых вопросах теории функций бесконечного числа переменных» [170] Л.А. Вишневский развивает теорию непрерывных и дифференцируемых функций в гильбертовом пространстве последовательностей. В первой главе этой работы рассматриваются множества точек и линий гильбертова пространства. На случай бесконечного числа переменных обобщаются основные теоремы анализа (теоремы Больцано–Вейерштрасса, Гейне–Бореля, Коши, Арцела) и изучаются непрерывные функции на совершенных множествах. Во второй главе рассмотрены разрывные функции, для которых перенесены основные результаты Бэра.

В третьей главе изучаются сходящиеся последовательности и ряды функций бесконечного числа переменных. Здесь рассмотрены различные виды сходимости: «просто равномерная» и квазиравномерная, обеспечивающая непрерывность суммы ряда непрерывных функций. Для функционалов рассмотрена также сходимость относительно числового параметра. Далее рассмотрены множества непрерывных функций и функционалов, для которых даны обобщения теорем Арцела и Бендиксона. В качестве приложения теоремы Арцела рассмотрен вопрос о нахождении функционала, удовлетворяющего некоторому уравнению. Предложенный метод обобщает метод Н.М. Крылова для дифференциального уравнения первого порядка. В четвертой главе введено понятие о частных производных для функций бесконечного числа переменных, обобщено понятие о полном дифференциале, получены обобщенные теоремы о среднем, ряд Тейлора и формула Стокса и намечены возможные дальнейшие обобщения. Здесь получены, исходя из структурных свойств функций, формулы, которыми Д. Гильберт пользовался для формального определения аналитических функций бесконечного числа переменных. Подробный разбор диссертации Л.А. Вишневского был сделан Н.М. Крыловым и опубликован в 1921 г. в «Записках математического кабинета Крымского университета».

В дальнейших работах Л.А. Вишневского дано применение теории функций бесконечного числа переменных к различным вопросам математического анализа, главным образом, относящихся к вариационному исчислению. В совместной с Н.М. Крыловым работе «Об абсолютном экстремуме в одной простейшей задаче вариационного исчисления» [171] доказывается существование абсолютного экстремума в рассматриваемой задаче с указанием эффективного метода получения экстремальной функции в некоторых частных случаях. Для доказательства существования абсолютного экстремума использованы результаты предыдущей работы Л.А. Вишневского, а в качестве эффективного метода нахождения решения указывается обобщенный метод Ритца, развитый в работах Н.М. Крылова.

В другой заметке «О приложении анализа бесконечного числа переменных в задачах вариационного исчисления» [172] указаны примеры приведения задач на отыскание абсолютного экстремума к задачам анализа бесконечного числа переменных. Обобщенная теорема Арцела применяется Л.А. Вишневским также для доказательства возможности выбора равномерно сходящейся последовательности квадратичных форм бесконечного числа переменных. В заметке «Об одной системе линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных» [173] Л.А. Вишневский успешно применяет теорию определителей бесконечного порядка. Для исследования проблем относительного экстремума функций бесконечного числа переменных Л.А. Вишневский использует разложения в ряд Тейлора. В статье «Об одном минимальном вопросе Чебышева» [174] Л.А. Вишневский рассматривает вопросы существования абсолютного экстремума сумм Чебышева не только для многочленов, но и для более широкого класса функций.

В 1929 г. академик Н.М. Крылов, развивая идеи П.Л. Чебышева, относящиеся к приближенному решению задач вариационного исчисления, делает ссылку на указанную статью Л.А. Вишневского.

Все рассмотренные работы Л.А. Вишневского имели существенное значение для развития и систематизации вариационных методов точного и приближенного решения дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений математической физики и для других примыкающих сюда исследований, проведенных главным образом в научной школе академика Н.М. Крылова.

После защиты указанной выше диссертации Л.А. Вишневский был утвержден в звании профессора Крымского университета.

В середине 20-х гг. Л.А. Вишневским были написаны и изданы две книги элементарного математического содержания – «Метрическая система мер» [175] (в связи с введением в те годы в СССР метрической системы) и пособие для математического самообразования, предназначенные для красноармейцев.

Будучи профессором Томского университета, с 1925 г. Л.А. Вишневский организует и проводит исследования по прикладным вопросам и приближенным методам математического анализа. В 1932–1937 гг. Л.А. Вишневский был первым директором Научно-исследовательского института математики и механики при Томском университете и руководил отделом прикладной математики в этом институте.

Л.А. Вишневский впервые в Томске явился инициатором подготовки специалистов по прикладной и вычислительной математике. По его инициативе в 1930 г. при университете создается вычислительное бюро, в котором были начаты работы по вычислению траектории полета снарядов и составлению баллистических таблиц.

В Томском университете в течение ряда лет Л.А. Вишневский в качестве своего основного курса читал лекции по вариационному исчислению. В литографическом виде курс лекций Л.А. Вишневского по вариационному исчислению был издан физико-математическим кружком Томского университета в 1929 г. и служил основным пособием для студентов. По объему материала курс вполне охватывает содержание университетского курса вариационного исчисления в том виде, как он сложился в двадцатые годы и сохранился без существенных изменений в течение следующих трех десятилетий. Курс вариационного исчисления Л.А. Вишневского содержит в качестве введения очерк развития основных идей вариационного исчисления от И. Ньютона и И. Бернулли до исследований Д. Гильберта по принципу Дирихле. В первой части курса даются: постановка задач на абсолютный и относительный экстремум, понятие первой вариации, необходимое условие относительного сильного экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления, основные леммы вариационного исчисления, уравнение Эйлера с указанием основных случаев его интегрируемости, обобщения простейшей задачи вариационного исчисления (случай нескольких неизвестных функций, случай высших производных, вариационная задача в параметрическом виде, случай нескольких независимых переменных, подвижные концы и условия трансверсальности, изопериметрическая задача, задачи на условный экстремум). Во второй части излагаются учение о второй вариации, элементы теории поля и достаточные условия сильного экстремума, понятие о прямых методах вариационного исчисления (метод Ритца), результаты исследований Д. Гильберта по принципу Дирихле, принцип Гамильтона и его применение в задачах о колебании струны и мембраны. В историческом очерке и заключительных разделах курса отражены научные интересы лектора, примыкающие к работам Д. Гильберта и исследованиям по методу Ритца.

Л.А. Вишневский был участником ряда математических съездов и конференций. На II Всесоюзном математическом съезде в 1934 г. он выступал с информацией о деятельности института математики при ТГУ.

В 1937 г. Л.А. Вишневский был необоснованно репрессирован, умер в 1938 г. в тюрьме до суда, впоследствии был реабилитирован.

§ 7

В конце 20-х и начале 30-х гг. коллектив томских математиков значительно пополнился выпускниками университета и учеными, приехавшими из других городов. Появились новые высшие учебные заведения. На базе педагогического факультета университета в 1930 г. был открыт Томский педагогический институт с физико-математическим факультетом. Укреплению университета способствовало принятое в 1931 г. постановление Совнаркома СССР об университетах. Постановление Центрального исполнительного комитета СССР от 19 сентября 1932 г. «Об учебных программах и режиме в высшей школе и техникумах» легло в основу подготовки высококвалифицированных специалистов для всех отраслей народного хозяйства, науки и просвещения. Несмотря на частые перестройки форм учебной и научной работы в рассматриваемые годы, научно-исследовательская работа университета и других высших учебных и научных учреждений Томска развивалась в направлении плановости и поисков новых форм и принципов организации научной работы.

В 1928 г. при Томском государственном университете был открыт Сибирский физико-технический научно-исследовательский институт (СФТИ). Коллектив ученых – математиков и механиков Томского университета, стремившийся развернуть научно-исследовательскую работу по математике и механике, осуществить активную связь науки с промышленностью и развитием народного хозяйства и укреплением обороноспособности страны, поднял вопрос об организации специального научно-исследовательского института математики и механики. По решению Совнаркома РСФСР от 13 мая 1932 г. при Томском государственном университете был открыт Научно-исследовательский институт математики и механики (НИИММ), объединивший значительную группу математиков и механиков. Задачами института, как указывалось в положении о НИИММ, были организация научно-исследовательской работы в области математики и механики и соприкасающихся с ними наук, постановка работ по применению математики и механики в промышленности и в деле укрепления обороноспособности СССР, подготовка научных и педагогических кадров через аспирантуру и широкая популяризация научных знаний по механико-математическим наукам. Директором института был назначен профессор Л.А. Вишневский. Институт в период своего существования (до 1941 г.) был направляющим центром научной деятельности математиков и механиков университета. В составе института было два отдела – теоретический и производственный.

В 1935 г. НИИММ начал издавать «Известия» института. Это был первый специальный журнал по математике и механике, издававшийся в Сибири. Ответственным редактором «Известий НИИММ» был профессор Ф.Э. Молин. Было издано 6 выпусков «Известий» и в 1940 г. вышел один том «Трудов» института. В журнале отражены основные направления научно-исследовательской деятельности томских математиков и механиков того периода: теория функций комплексного переменного, теория чисел, вопросы математической физики и теоретической механики, некоторые задачи прикладного характера и теории приближенных вычислений. Кроме работ томских ученых, редакция журнала публиковала также работы советских ученых из других городов (А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, С.П. Фиников, Д.А. Райков, С.Н. Бернштейн, И.И. Привалов, Н.А. Селиванов, Н.С. Кошляков и др.) и иностранных ученых

(П. Эрдеш, П. Туран, Дж. Нейман, А. Эйнштейн и др.). Издание математического журнала способствовало усилению связей томских математиков с другими научными учреждениями и коллективами СССР и других стран. Этому же способствовали и некоторые другие мероприятия. Группы томских математиков участвовали в работах I (в 1930 г.) и II (в 1934 г.) всесоюзных математических съездов. Гостями томских математиков в эти годы были французский академик Ж. Адамар в 1936 г. и польский математик К. Заранкевич. Для чтения курса лекций по математической физике в 1933/34 учебном году был приглашен из Ленинграда профессор Н.С. Кошляков. Известный советский математик профессор Московского университета И.И. Привалов прочитал в Томске цикл лекций по вопросам теории функций комплексного переменного и опубликовал обзорную статью в «Известиях» НИИММ.

Проводилась значительная работа по популяризации математических знаний. С 1935 г. в Томске стали проводиться математические олимпиады для школьников. В проведении олимпиад принимали участие ведущие ученые-математики Томска.

К середине 30-х гг. в Томском университете образовалась значительная группа ученых математических специальностей, ведущих интенсивную научную работу. Кроме указанных выше профессоров Ф.Э. Молина, В.А. Малеева, Л.А. Вишневского, Н.Н. Горячева, М.Н. Иванова, в этот период в Томске работали профессора: А.С. Praetorius Praetorius Praetorius

Профессора С. Бергман и Ф. Нетер, вынужденные эмигрировать из фашистской Германии, были приглашены в Томск в 1934 г. и работали в Томском университете в течение почти трех лет.

Стефан Брониславович Бергман (р. 1897) окончил политехнический институт в Вене, работал в Берлине. В Томске находился в 1934–1936 гг., затем некоторое время жил в Тбилиси, с 1953 г. – профессор Станфордского университета в США. Научные интересы С. Бергмана относятся к теории функций комплексного переменного и теории дифференциальных уравнений в частных производных. В теории функций двух и более комплексных переменных вошли в терминологию керн-функция Бергмана, интегральное представление Бергмана–Вейля, метрика Бергмана. Русский перевод книги С. Бергмана «Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными» был издан в 1964 г. В начале 70-х гг. С. Бергман приезжал в Новосибирск для участия в научной конференции.

Профессор Фриц (Фридрих) Максимилианович Нётер принадлежал к математической династии. Его отец, немецкий математик Макс Нётер (1844–1921) много лет был профессором в Эрлангенском университете. Занимался вопросами алгебраической геометрии, развивал теорию алгебраических кривых в связи с теорией абелевых интегралов и общую теорию пространственных алгебраических кривых и поверхностей.

Сестра Ф. Нётера Эмми Нётер (1882–1935) – одна из основоположников современной абстрактной алгебры. Ей принадлежит фундаментальная теорема теоретической физики. В 1928/29 учебном году читала курс абстрактной алгебры в Московском университете.

Ф. Нётер (1884–1941) математическое образование получил в Эрлангенском и Мюнхенском университетах. В 1909 г. защитил докторскую диссертацию «Вращательные движения шара по поверхности». Занимаясь вопросами прикладной математики и механики, сотрудничал с профессорами Мюнхенского университета А. Воссом и А. Зоммерфельдом. После защиты диссертации работал в Высшем техническом училище в Карлсруэ, где вел курсы теоретической механики и математики. В годы Первой мировой войны находился в армии. С конца 1922 до 1934 г. занимал должность профессора теоретической физики и прикладной математики в Бреслау (Вроцлав). В Томске с 1 сентября 1934 г. Ф. Нётер – сотрудник Научно-исследовательского института математики и механики и профессор кафедры математики. В первый год пребывания в Томске Ф. Нётер занимался научной деятельностью и освоением русского языка. В 1935 г. выезжал в Москву на заседание Московского математического общества, посвященное памяти его сестры Эмми Нётер. В 1936 г. был участником Международного конгресса математиков в Осло.

С осени 1935 г. читал курсы лекций по специальным вопросам математической физики, механики, теории специальных функций, вместе с П.П. Куфаревым проводил спецсеминар со студентами-математиками.

В 1921 г. Ф. Нётер опубликовал статью по теории сингулярных интегральных уравнений, расширяющую теорию интегральных уравнений Фредгольма. Наряду с интегральными уравнениями рассматривается более широкий класс линейных операторов, получивших название нётеровых операторов. К этому классу операторов относятся линейные операторы, порождаемые общими краевыми задачами для эллиптических уравнений. Основные результаты сформулированы в двух теоремах Нётера, обобщающих известные теоремы Фредгольма. Рассмотренный класс сингулярных интегральных уравнений называется нётеровым. В Томске им были опубликованы две статьи, одна из них – по рекуррентным формулам функций Бесселя и Эрмита, другая – по асимптотическим формулам и геометрической оптике. Ф. Нётеру принадлежит раздел в книге Ф. Франка и Ф. Мизеса «Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики», русский перевод которой издан в 1936 г. С начала 1936 г. он работал над книгой о бесселевых функциях. 22 сентября 1937 г. Ф. Нётер был арестован и 11 сенября 1941 г. расстрелян в Орловской тюрьме, при подходе немецких войск к городу. В 1989 г. был реабилитирован.

Сыновья Ф. Нётера Герман и Готфрид были студентами Томского университета. После ареста отца они были вынуждены выехать из СССР. Герман (1912–1990) окончил химический факультет Томского университета. Готфрид (р. 1915) в 1934 г. поступил на первый курс физико-математического факультета по специальности «математика», а окончил университет штата Огайо (США) в 1940 г. и работал в американских университетах. С 1957 г. – профессор Бостонского, а с 1968 г. – Коннектикутского университета, член Американской академии искусств и наук. Научные интересы относятся к теории и методологии непараметрической статистики.

Для роста научно-педагогических кадров и повышения их научной квалификации большое значение имело постановление Совнаркома СССР об установлении ученых степеней и званий с защитой кандидатских и докторских диссертаций.

С 1935 г. Томскому государственному университету было предоставлено право приема к защите кандидатских и докторских диссертаций по ряду специальностей, в том числе и по физико-математическим наукам. Профессорам Ф.Э. Молину и Н.Н. Горячеву ученая степень доктора физико-математических наук была присуждена по совокупности имеющихся печатных работ без защиты диссертаций.

С 1935 г. среди математиков и механиков развернулась работа по подготовке и защите кандидатских и докторских диссертаций. Дальнейшее развитие получила и аспирантура как основная форма подготовки научных и педагогических кадров высшей квалификации.

В активную научную работу включаются почти все сотрудники математических кафедр высших учебных заведений Томска. Работы томских математиков и механиков стали все чаще публиковаться во всесоюзных изданиях, и число публикаций значительно возросло.

Кафедры стали шире и смелее вовлекать в научную работу студентов. В 1939/40 учебном году была проведена первая студенческая научная конференция, а в конце следующего учебного года состоялась 1-я городская научно-техническая студенческая конференция. Активно работали студенческие научные кружки и семинары.

В 30-е гг. все большее развитие получают коллективные формы научной работы. Объединяющими центрами становятся семинары.

Большая группа томских математиков объединилась в семинаре по аналитическим функциям под руководством профессора С.Б. Бергмана. В программу семинара входило изучение некоторых проблем теории функций двух комплексных переменных и приложения теории функций комплексного переменного к вопросам прикладной математики (аэромеханика, теория упругости).

Деятельность томского семинара по теории функций двух комплексных переменных в 1935/36 учебном году положила начало исследованиям советских математиков по теории функций двух и многих комплексных переменных.

Под руководством профессора Ф.Э. Молина работал семинар по дифференциальным уравнениям с участием, главным образом, сотрудников педагогического института.

§ 8

Интересы томских математиков в начале 30-х гг. к вопросам дифференциальных уравнений нашли выражение в ряде работ, опубликованных в «Известиях НИИММ». В статье Е.Н. Аравийской [153] изучаются свойства интегралов дифференциальных уравнений, интегрирующихся в квадратурах, рассматривается дифференциальное уравнение

$$y' = F\left(x, y, \lambda\left(x\right)\right),$$

где $\lambda(x)$ – произвольная функция от x.

Для изучения интегралов этого уравнения вводятся две интегральные операции различных порядков, через которые выражается интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения. В результате исследования получено выражение интегрального уравнения с помощью двух операций – первого порядка I_1 и второго порядка I_2 в виде

$$y = I_2 e^{-I_1}.$$

В работе [230] Н.В. Оранской интегрирование линейного дифференциального уравнения Спарре

$$y'' + f\left(x\right)y' + \alpha^2\varphi\left(x\right)y = \alpha^q F\left(x\right)$$

сводится к решению интегрального уравнения типа Вольтерра. Общий интеграл исходного уравнения получен в виде

$$y\left(x\right) = \nu\left(x\right) + \frac{1}{\alpha}\int_{x_0}^{x}\Gamma\left(\alpha, x, t\right)v\left(t\right)dt.$$

Работа Н.В. Оранской была выполнена в семинаре Ф.Э. Молина по дифференциальным уравнениям.

Доцент А.К. Минятов в работе [224] провел сравнительное исследование дифференциальных и разностных уравнений, в котором получена формула для дискретного и аналитического решения разностных уравнений и систем разностных уравнений. Полученная формула представляет некоторую аналогию с формулой Маклорена–Эйлера, дающей решение простейшего разностного уравнения. При дискретной постановке задачи решения разностного уравнения приходится находить сумму конечного числа значений функции, аргументы которой составляют арифметическую прогрессию. При более общей постановке вопроса задача приводится к решению функционального уравнения с двумя переменными. В последнем случае для определенности решения оказывается необходимым подчинить искомое решение дополнительным условиям, например потребовать, чтобы решение было аналитическим. Решение общего разностного уравнения первого порядка

$$y(x+\omega,\omega)-y(x,\omega)=\omega\varphi\left[x,y(x,\omega)\right]$$

ищется в виде ряда, расположенного по степеням ω:

$$y(x,\omega)=\eta(x)+\eta_1(x)\frac{\omega}{1}+\eta_2(x)\frac{\omega^2}{1\cdot 2}+\ldots,$$

для функций $\eta(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, … указываются соотношения, по которым возможно нахождение этих функций. Для суммирования получающихся рядов типа Маклорена–Эйлера применяется метод Бореля для суммирования расходящихся рядов.

Все эти работы связаны с практическим решением дифференциальных и разностных уравнений и имеют прикладное значение. А.К. Минятов занимался также вопросами интерполирования функций. В работе, опубликованной в «Математическом сборнике» [225], он получил несколько новых интерполяционных формул, исходя из общих соображений об источнике интерполяционных формул. С помощью симметрической функции двух аргументов $\Psi(\xi, x)$ он составляет линейную комбинацию

$$l(x)=L_1\Psi(x_1,x)+\ldots+L_n\Psi(x_n,x),$$

в которой коэффициенты L_i подбираются так, чтобы в точках x_i значения $l(x)$ совпадали со значениями данной функции. Позднее им были рассмотрены интерполяционные задачи для функций многих комплексных переменных. Полученный интерполяционный ряд оказался одновременно и разложением функции по ортогональным функциям.

В работах 1934 г., опубликованных в «Математическом сборнике» [226] и «Трудах Второго Всесоюзного математического съезда», А.К. Минятов исследовал остаточные члены при приближенном вычислении определенных интегралов. Оценка остаточного члена дана им через верхнюю границу значений некоторого линейного дифференциального выражения (в обычных формулах приближенного интегрирования используется только граница для производной высшего порядка). В 1937 г. А.К. Минятов стал жертвой необоснованной репрессии.

В статьях А.А. Темлякова, работавшего в Томском университете в 1933–1938 гг., рассмотрены некоторые вопросы интегральных уравнений. В статье [257] для особого интегрального уравнения типа Вольтерра доказано существование решения эффективным способом его получения. Особенностью однородного интегрального уравнения рассматриваемого типа является существование собственных решений с непрерывным спектром. Отмечена связь рассматриваемого интегрального уравнения с особым линейным дифференциальным уравнением, которое в окрестности особой точки допускает правильные решения. Ядро изучаемого интегрального уравнения имеет вид

$$\Phi\left(\frac{s}{x}\right)\frac{1}{s},$$

причем

$$\int_0^1 \Phi(z) z^{-k} dz$$

для $k \geq 0$ существует.

В двух других статьях [258, 259] рассматриваются нелинейные интегральные уравнения типа Фредгольма. Для нелинейного интегрального уравнения вида

$$\varphi(x) = \lambda \int K(x,s) f\left(s, \varphi(s)\right) ds$$

доказано существование единственного обращающегося в нуль при $\lambda = 0$ решения с достаточно малым кругом сходимости при выполнении условия Липшица.

Кроме того, рассматриваемое интегральное уравнение может иметь и особые решения, обращающиеся в бесконечность при $\lambda = 0$. Такой подход к нелинейным интегральным уравнениям был новым. В работе 1938 г. [259] А.А. Темляковым рассмотрено нелинейное интегральное уравнение вида

$$\lambda \int_a^b F\left(x, s, \varphi(s)\right) ds = f(x),$$

для которого при некоторых дополнительных предположениях доказано существование решения, стремящегося к нулю при стремлении λ к нулю, а также решения с интегрируемым квадратом при достаточно малом $|\lambda|$.

А.А. Темляков занимался и некоторыми вопросами теории гармонических функций трех переменных. В 1935 г. им опубликованы две работы [260, 261] по проблеме роста гармонических функций трех переменных. Исследования по этим вопросам были им продолжены после отъезда из Томска в период его работы в Пермском университете и Московском областном педагогическом институте. А.А. Темляков был одним из активных участников томского семинара по аналитическим функциям двух комплексных переменных в начальный период существования семинара.

Исследования томских математиков по математической физике в середине 30-х гг. представлены работами Ф. Нётера, Г.А. Бюлера, Г.Н. Коржавина. В одной из работ Ф. Нётера, опубликованной в «Известиях НИИММ», рекуррентные формулы для функций Бесселя и Эрмита получены из дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующих этим функциям. Такой подход позволяет положить рекуррентные формулы в основу построения теории соответствующих функций, не обращаясь к обыкновенным дифференциальным уравнениям этих функций или их представлениям с помощью рядов или интегральных выражений. В статье Ф. Нётера [228] «Асимптотические формулы и геометрическая оптика» дано решение одной задачи из теории дифракции (расходящаяся цилиндрическая волна) в интегральном виде с использованием асимптотических формул Дебая для цилиндрических функций. Исследование первого приближения решения поставленной задачи обнаруживает связь решения с геометрической оптикой. Вычисление дифференциального поля для освещенной области проводится по способу седлообразной точки, а для теневой области вычисление возможно только по методу интегральных вычетов.

Г.А. Бюлер в связи с решением волнового уравнения для эллиптического цилиндра изучал интегральное представление функций Матье. Для нахождения ядра интегрального представления функций Матье автор пользуется некоторой аналогией изучаемых функций с цилиндрическими, которые могут быть получены как предельные случаи функций Матье. Специально рассматривается периодическое решение уравнений Матье. Указанные исследования функций Матье составили содержание диссертации Г.А. Бюлера на степень кандидата физико-математических наук, защищенной в 1941 г. Опубликование работы задержалось до 1946 г.

Г.Н. Коржавин рассматривал задачу о распространении электрического тока в земле, применяя точный и приближенный методы решения. Приближенный результат получается при решении задачи с помощью интегрального уравнения методом Нётера. Решение задачи как краевой задачи для дифференциального уравнения позволяет получить точный результат. Для решения дано интегральное представление с использованием функций Бесселя и Ханкеля. Сравнение полученных двумя способами результатов показывает, что при достаточно большом расстоянии от проводника результаты совпадают.

В 1935 г. были опубликованы две статьи С. Бергмана об изгибе прямоугольной пластинки.

К этому же кругу работ примыкают ранние исследования П.П. Куфарева по теории упругости, в которых методами технической теории упругости производится вычисление давлений между частями многопластинчатой балки и срезающих сил, действующих при изгибе на электросварочный шов.

В 1935 г. П.П. Куфарев защитил кандидатскую диссертацию «К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения», в которой использует для решения поставленной задачи аппарат теории аналитических функций.

По теории упругости была выполнена кандидатская диссертация Е.Д. Томилова, защищенная в 1937 г.

В работах М.С. Горохова, опубликованных в 1938–1940 гг. в «Известиях» и «Трудах» НИИММ, проведено исследование дифференциальных уравнений. В небольшой заметке [177] М.С. Горохов рассмотрел связь графического метода интегрирования с численным.

В 1928–1934 гг. по совместительству состоял профессором по кафедре математики профессор Томского технологического института Георгий Владимирович Трапезников (1891–1937), а с открытием НИИММ в 1932 г. он стал заведующим сектором механики этого института, в котором разрабатывались темы расчетного характера. Привлечение Г.В. Трапезникова к работе в университете было связано с введением в учебные планы ряда технических курсов в период индустриализации страны. Некоторое время факультет назывался физико-механическим.

§ 9

Алгебраические исследования томских математиков в рассматриваемый период отражены в работах Ф.Э. Молина и В.А. Малеева. Кроме того, Б.А. Фукс в своих ранних работах рассматривал некоторые вопросы теории алгебр Ли. Две статьи по этим вопросам были опубликованы им в Томске. В статье «О преобразованиях, оставляющих данную группу инвариантной» [277] изучаются внешние автоморфизмы группы. Полученные результаты относятся к группе наиболее общего типа, которая может не быть ни полупростой, ни интеграбельной, как это имело место в исследованиях Э. Картана. Детально изучены внешние дифференцирования алгебр Ли. Основные результаты исследования сформулированы в виде четырех теорем. Приведем формулировки первой и четвертой теорем:

Теорема 1. Если Zf – преобразование, оставляющее группу G инвариантной, не сводящееся к соединению какого-нибудь преобразования с преобразованием, перестановочным с G, скобки (Z, x_k) могут зависеть только от тех преобразований G, которые определяются приравниванием нулю тех линейных форм из l, от которых существенно зависит характеристический определитель группы G.

Теорема 4. Преобразования некоторой неинтеграбельной группы, не входящие в ее ядро, образуют сами интеграбельную группу по модулю некоторой «нулевой» подгруппы ранга ядра, коммутативной с преобразованиями полупростой подгруппы всей группы, с ней изоморфной. Если серии Картана, на которые распадаются преобразования наиболее инваринтной подгруппы ранга ядра, таковы, что каждое преобразование этой подгруппы, не входящее в нулевую группу, принадлежит к какой-нибудь одинарной серии, то эта нулевая подгруппа совпадает с центром ядра.

Проведенное исследование позволяет высказать и ряд побочных результатов, относящихся к композиции преобразований и возможности превращения центральных преобразований группы G в нецентральные преобразования расширенной группы. Во второй статье [278] дается обобщение одной теоремы С. Ли, касающейся вопроса об определении преобразований, перестановочных с преобразованиями данной группы.

В статье Б.А. Фукса результат С. Ли обобщается на преобразования, оставляющие данную группу инвариантной. Обобщение получается в итоге изучения решений дифференциальных уравнений, определяющих автоморфизмы группы преобразований.

Из геометрических работ, выполненных томскими математиками в первой половине 30-х гг., отметим опубликованную в 1935 г. статью [250] В.А. Соколовой об изгибании минимальной поверхности переноса. Эта статья продолжает ее более ранние работы, выполненные в геометрическом семинаре Ф.Э. Молина. В работе показано, что поверхность Эннепера есть результат изгибания поверхности Шерка. Проведено также исследование плоских сечений поверхности Эннепера. Исследования В.А. Соколовой по теории минимальных поверхностей переноса составили ее кандидатскую диссертацию, защищенную в 1941 г. Почти одновременно была защищена другая кандидатская диссертация Л.С. Фрейман (Богословской) по дифференциальной геометрии на тему «Об одной системе минимальных поверхностей», завершившая исследования, о которых уже было написано выше.

Здесь можно упомянуть об изданных в Томске книге А.А. Савелова об аффинных преобразованиях (1937) [239], имеющей характер учебного пособия, и о справочнике по кривым линиям «Замечательные кривые» (1938) [240]. В книге проведено систематическое исследование большого числа кривых, рассмотрены различные способы их построения и применения в механике, физике и технике. Впоследствии аналогичная книга А.А. Савелова была издана в Москве.

§ 10

С пребыванием в Томске в 1935–1936 гг. профессора А.С. Кованько связано появление работ по теории функций действительного переменного.

А.С. Кованько до приезда в Томск после окончания Московского университета работал в Азербайджанском и Ленинградском университетах, имел большое число научных трудов по теории функций, теории интеграла и теории почти периодических функций. В работах, относящихся к периоду его пребывания в Томске, продолжаются исследования по указанным направлениям. В статье «О некоторых видах сходимости последовательностей функций одной действительной переменной на $(-\infty, +\infty)$» [195] А.С. Кованько рассматривает два вида сходимости последовательности функций. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится «S по мере», если как бы ни было мало положительное число $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) и каково бы ни было число $l > 0$, существует такое число $N > 0$, что имеет место неравенство

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

при всяком $n > N$ и при любом p для всех значений x, исключая, быть может, множества $E_{n,\,n+p}$, средняя плотность которых меньше S на любом интервале длины l. Второй вид сходимости для суммируемых функций: последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится $S\omega$ в среднем ($\omega \geq 1$), если, как бы мало ни было е > 0 и каково бы ни было число $l > 0$, существует такое число $N > 0$, что

$$\sup_{-\infty<\alpha<\infty} \frac{1}{l} \int_a^{a+l} \left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right|^{\omega} dx < \varepsilon,$$

при всяком $n > N$ и при любом p. Далее показывается, что в обоих случаях для последовательности функций существует предельная функция. В применении к теории почти периодических функций отсюда получаются следующие теоремы:

1) Если последовательность функций почти периодических в смысле Степанова ($S\omega$) сходится $S\omega$ в среднем, то предельная функция также почти периодическая в смысле Степанова (I).

2) Если последовательность функций почти периодическая в смысле Степанова ($S\omega$) сходится $S\omega$ в среднем, то предельная функция также почти периодическая в смысле Степанова ($S\omega$).

В исследованиях по теории меры поверхностей А.С. Кованько рассматривает два вида квадрируемых поверхностей, исходя из определений, данных А. Лебегом, Гетце и Дж. Пеано для величины площади поверхности. В одном случае, используя свойства приводимых множеств, дано расширение определения величины площади поверхности, охватывающее определения А. Лебега, Гетце и Дж. Пеано. В других исследованиях по теории интеграла А.С. Кованько дает определение и развивает теорию интеграла Римана–Стильтьеса для функций двух независимых переменных с двумя добавочными функциями. Подобное обобщение возможно и для многомерного пространства. При помощи пары непрерывных функций φ и ϕ, обладающих специальным свойством, А.С. Кованько строит функцию $[\varphi, \phi]_Q$ квадрируемой области, которая обладает свойствами:

1) $[\varphi,\phi]_{Q_1} + [\varphi,\phi]_{Q_2} = [\varphi,\phi]_{Q_1+Q_2}$ для $Q_1Q_2 = 0$,

2) $[\varphi_1 + \varphi_2, \phi]_Q = [\varphi_1, \phi]_Q + [\varphi_2, \phi]_Q$,

3) $[x, y]_Q = Q$.

Пусть $f(x, y)$ – ограниченная функция, определенная на области Q. Разбивая Q на области Q_1, Q_2, ..., Q_n достаточно малого диаметра, А.С. Кованько определяет интеграл Стильтьеса как предел суммы

$$\sum f(x_k, y_k)[\varphi, \phi]_{Q_k},$$

когда диаметры Q_k стремятся к нулю, (x_k, y_k) I Q_k. Для определенного таким образом интеграла вводится обозначение

$$\iint_Q fD[\varphi, \phi].$$

Далее, дано определение интеграла Стильтьеса поверхностного типа. Если три функции

$$x = \varphi(u, v),\ y = \phi(u, v),\ z = \chi(u, v)$$

определяют поверхность, то интеграл Стильтьеса определяется как предел суммы

$$\sum_1^n f(x_k, y_k)\sqrt{[\phi,\chi]_{Q_k}^2 + [\chi,\varphi]_{Q_k}^2 + [\varphi,\phi]_{Q_k}^2}$$

и обозначается

$$\iint_Q f(x, y)\sqrt{\{D[\phi,\chi]\}^2 + \{D[\chi,\omega]\}^2 + \{D[\varphi,\phi]\}^2}.$$

Если $f(x, y) = 1$, то интеграл дает площадь поверхности. Таким образом, теория интеграла Римана–Стильтьеса развита в связи с теорией меры поверхности. В статье «Взаимоотношения различных обобщений почти периодических функций» [196] проведен анализ всех обобщений почти периодических функций, данных в работах Г. Бора, В.В. Степанова, Г. Вейля, А. Безиковича и А.С. Кованько. Указывается возможность введения новых классов почти периодических функций, промежуточных к ранее известным.

Под руководством А.С. Кованько А.С. Джанумянц провел исследование по теории интеграла Стильтьеса, составившее содержание его кандидатской диссертации (1938). В работе [182] изучается взаимосвязь криволинейного интеграла с интегралом Стильтьеса. Введение и первая глава статьи А.С. Джанумянца содержат обзор классической теории интеграла Стильтьеса и ее связи с теорией криволинейного интеграла по спрямляемой кривой. Вопрос об определении криволинейного интеграла по неспрямляемым кривым впервые был рассмотрен в работах А.С. Кованько в 1927 г.

В работе А.С. Джанумянца криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой C Жордана строится на основе интеграла Стильтьеса при условии, что функции P и Q непрерывные и имеют ограниченную вариацию. Далее изучаются свойства интеграла

$$\int_C Pdx \pm Qdy,$$

в частности, рассмотрен криволинейный интеграл по замкнутому множеству, расположенному на дуге кривой. Дальнейшее обобщение интеграла по неспрямляемой кривой Жордана связывается с введением несобственного интеграла Стильтьеса, что позволяет снять требование ограниченной вариации функций P и Q. Указанное обобщение аналогично процессу тотализации Данжуа. В заключении работы дан сравнительный анализ предложенного метода определения криволинейного интеграла с методом (использованным А.С. Кованько) определения криволинейного интеграла по неспрямляемой кривой с помощью формулы Грина.

§ 11

Как уже было отмечено, в середине 30-х гг. внимание большой группы томских математиков было обращено на теорию аналитических функций. С самого начала деятельности семинара по теории аналитических функций активными участниками стали Е.Н. Аравийская, С.Б. Бергман, П.П. Куфарев, А.К. Минятов, И.М. Митрохин, А.А. Темляков, Б.А. Фукс, Г.А. Бюлер, Н.П. Романов и другие.

Программа научной работы по теории аналитических функций в Томском университете была подробно освещена в статье С.Б. Бергмана [84], помещенной в первом выпуске «Успехов математических наук» (1936 г.).

Основные направления исследований в первый период деятельности семинара сложились по следующим вопросам:

1) теория отображений с помощью аналитических функций двух комплексных переменных, в особенности вопросы псевдоконформных отображений;

2) изучение свойств мероморфных функций двух комплексных переменных, в частности установление связи между ростом мероморфной функции и распределением ее значений, обобщение понятий и теорем теории функций одной комплексной переменной;

3) изучение специальных классов функций, в особенности теория гармонических функций трех переменных, и построение интегральных представлений функций двух комплексных переменных;

4) некоторые задачи прикладного характера из теории упругости.

С периодом организации семинара и установления тематики исследований связан приезд в Томск осенью 1934 г. руководителя Московской школы теории функций комплексной переменной профессора И.И. Привалова. В Томске И.И. Привалов выступил с рядом лекций и докладов по теории функций комплексной переменной. В «Известиях НИИММ» в 1935 г. помещены две статьи И.И. Привалова: «Современные проблемы теории функции комплексного переменного» и «Обобщение метода Линделефа» [232, 233].

Программа научной работы по аналитическим функциям, наметившаяся в томском семинаре, в некоторой степени объединяла прежние научные интересы участников семинара.

Изучение структуры метрики, инвариантной при псевдоконформных отображениях, осуществляемой парой аналитических функций двух комплексных переменных, было проведено в работах С.Б. Бергмана, Б.А. Фукса, И.М. Митрохина. Ряд работ С.Б. Бергмана по теории аналитических функций двух и нескольких комплексных переменных был им выполнен с 1922 по 1934 г., т.е. до его пребывания в Томске.

В теории псевдоконформных отображений известны две метрики, инвариантные по отношению к этим отображениям. Первая введена К. Каратеодори в 1927 г., вторая – С.Б. Бергманом в 1929–1931 гг. с помощью ядровой функции (по другим терминологиям – кернфункции, или основной функции). В работах томского периода С.Б. Бергман продолжал исследования по ряду вопросов теории функций двух комплексных переменных. В статье «К теории псевдоконформных отображений» [159], опубликованной в «Математическом сборнике», и заметке в «Докладах Академии наук» [160] дано обобщение неравенства Шварца для псевдоконформных отображений в том смысле, что четырехмерный объем соответствующих индикатрис связан тем же неравенством. Более сложным оказывается перенесение на случай псевдоконформных отображений соответствующего неравенства для линейных элементов.

Другой способ получения упомянутых неравенств был позднее в 1945–1946 гг. предложен Б.А. Фуксом. В 1934–1937 гг. Б.А. Фукс проводит глубокие исследования об инвариантной римановой метрике в теории псевдоконформных отображений. Этот цикл исследований завершается его докторской диссертацией, защищенной в 1938 г. В первой заметке из этого цикла [281] Б.А. Фукс рассматривает вопрос о существовании и методах нахождения аналитических, вполне геодезических многообразий четырехмерной римановой геометрии. Эта геометрия была установлена С.Б. Бергманом внутри четырехмерной области и инвариантна при псевдоконформных отображениях. Более развернутое изложение теории геодезических многообразий указанной римановой геометрии, инвариантной при псевдоконформных отображениях, дано Б.А. Фуксом в статье [279], опубликованной в «Математическом сборнике» в 1936 г. В заметке «О группе псевдоконформных отображений, оставляющих инвариантной некоторую область» («Известия НИИММ», 1937) [284] доказывается, что для того чтобы группа псевдоконформных отображений Xf оставляла бы инвариантной область L, необходимо и достаточно, чтобы $X[\lg K]$ было бы действительной частью некоторой аналитической функции. $K(z^*, z^*)$ – здесь кернфункция области L.

Б.А. Фукс дал оценку границы изменения кривизны аналитической поверхности, а в заметке [283] он получил оценку для вариации угла при псевдоконформных отображениях. В заметке «О группе движения геометрии, инвариантной при псевдоконформных отображениях» [280] Б.А. Фукс дает эффективное перечисление всех возможных типов групп движений и определение соответствующих им выражений основных функций области.

Новые результаты получены Б.А. Фуксом в теории однолистных псевдоконформных отображений. В его статье «К теории однолистных псевдоконформных отображений» [285] получен ряд неравенств и ограничений геометрических величин, характеризующих рассматриваемые отображения. В работе Б.А. Фукса рассмотрено локально-изометрическое отображение, частным случаем которого является псевдоконформное отображение. Введением так называемых репрезентативных координат такие отображения можно выразить с помощью линейных уравнений.

Итоговая статья «Об инвариантной римановой метрике в теории псевдоконформных отображений и ее приложениях» по всему этому циклу исследований Б.А. Фукса опубликована в 1939 г. [286].

К работам Б.А. Фукса примыкает работа молодого томского математика, аспиранта НИИММ, скончавшегося вскоре после окончания Томского университета, Ивана Михайловича Митрохина (1913–1937). В его статье «Об изменении кривизны гиперповерхностей при псевдоконформных отображениях» [223] устанавливается полная система инвариантов, характеризующих кривизну гиперповерхности в особой неевклидовой метрике, а затем находятся границы изменения некоторых геометрических евклидовых величин при псевдоконформных отображениях. Границы изменения инвариантов евклидовой метрики удается установить только для определенных классов отображающих функций. Отмечается интересный случай, когда гиперповерхность является аналитической, т.е. получается из аналитических поверхностей аналогично тому, как линейчатая поверхность складывается из прямых линий. В отмеченном случае определитель Леви обращается в нуль. Здесь же выясняется дифференциально-геометрический смысл определителя Леви. Кривизна гиперповерхностей в рассматриваемом пространстве характеризуется шестью скалярными величинами, через которые можно линейно выразить компоненты тензора относительной кривизны гиперповерхности.

Для изучения многих проблем теории функций многих комплексных переменных большое значение имеют системы аналитических функций, ортогональных между собой и нормированных в рассматриваемой области. В связи с общей теорией ортогональных функций изучались и некоторые другие вопросы теории функций нескольких комплексных переменных.

Теория ортогональных функций многих комплексных переменных была развита С.Б. Бергманом в ряде работ с 1922 г. В Томске им была опубликована статья «К теории линейных интегральных и функциональных уравнений в комплексной области» [161], в которой применяется теория ортогональных систем аналитических функций. В работе указывается необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовала функция $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных с интегрируемым квадратом по «особенной граничной поверхности» и удовлетворяющая некоторому интегральному уравнению. В этой же работе установлен критерий существования функции двух комплексных переменных, регулярной в заданной области и с интегрируемым квадратом, которая на бесконечной последовательности двумерных аналитических поверхностей, лежащих в данной области, совпадала бы на каждой поверхности с заданными функциями. Последняя задача относится уже к теории интерполирования. Как было указано выше, вопросами интерполирования функций многих комплексных переменных занимался в Томске также А.К. Минятов, который для построения интерполяционного ряда использовал понятие ядровой функции.

В работах С.Б. Бергмана в томский период его деятельности получила развитие также теория мероморфных функций двух и нескольких комплексных переменных. Были исследованы особенности функций, удовлетворяющих линейным уравнениям в частных производных, вопросы интегрального представления функций двух комплексных переменных и некоторые приложения. В частности, рассмотрен метод эффективного конформного отображения, основанный на введении понятия ядра как функции двух комплексных переменных. Нахождение отображающей функции тогда сводится к геодезическим линиям и ортогональным траекториям к ним в некотором Римановом многообразии, метрика которого определяется ядром. Метод применим к решению задач гидродинамики.

В исследованиях по теории гармонических функций трех переменных [260, 261] А.А. Темляков применял интегральное представление функций. Позднее метод интегрального представления в работах А.А. Темлякова получил значительное развитие и стал исходным моментом для многих интересных исследований аналитических функций, в частности вопросов аналитического продолжения и решения волнового уравнения с тремя независимыми переменными.

Г.А. Бюлер исследовал функции двух комплексных переменных, мероморфные в единичном бицилиндре. В работе [165] изучается асимптотическое поведение мероморфных функций. Получено необходимое и достаточное условие того, чтобы порядок роста функции $f(z_1, z_2)$ не превосходил данного числа $\lambda > 0$. Исследован также порядок роста функции целой в единичном бицилиндре. Результат исследования показывает, что порядок роста целой функции $f(z_1, z_2)$ может отличаться от порядка роста ее характеристической функции самое большее на два.

П.П. Куфарев в связи с разработкой эффективных методов конформных отображений для решения конкретных задач теории упругости пришел к исследованию ядровой функции области. В статье «О минимальной области для двусвязных областей» [201] П.П. Куфарев получил выражение для ядровой функции области с помощью эллиптических функций, что позволило установить вид минимальной области для двусвязных областей. В работе показано, что минимальная область расположена на двулистной римановой поверхности, листы которой соединены по прямолинейному разрезу, и симметрична по отношению к прямой, перпендикулярной разрезу. В другой статье «Об одном свойстве ядровой функции области» [202] П.П. Куфарев получает асимптотическое выражение для ядровой функции области при приближении точки к границе области. Доказательство теоремы проведено для односвязной и многосвязной областей.

С самого начала деятельности в Томске семинара по аналитическим функциям двух комплексных переменных его активным участником стала Е.Н. Аравийская, научные интересы которой с этого времени сосредоточились на вопросах теории функций двух и многих комплексных переменных. В дальнейшем Е.Н. Аравийская возглавила томскую группу по теории функций многих комплексных переменных, являясь руководителем продолжающихся исследований в этой области.

В своих первых работах по теории функций двух комплексных переменных Е.Н. Аравийская занимается исследованием вопросов аналитического представления функций. Применяя интегральное представление аналитической функции двух комплексных переменных, Е.Н. Аравийская в статье [154], опубликованной в «Математическом сборнике» в 1937 г., указала новый способ разложения функции в ряд многочленов.

Рассматривая области, ограниченные конечным числом аналитических гиперповерхностей и при выполнении еще некоторых дополнительных условий, Е.Н. Аравийская показывает возможность построения полной ортогональной системы функций.

В статье [155] «О приближенном представлении функций двух комплексных переменных в областях, конвексных относительно некоторых классов функций» Е.Н. Аравийская указывает на возможность при некоторых условиях исчерпывания всякой области *B* последовательностью входящих одна в другую областей, ограниченных конечным числом аналитических гиперповерхностей вида

$$\left| f_n\left(z_1, z_2\right) \right| \leq 1,$$

где $f_n(z_1, z_2)$ – функция класса *K*.

Частным случаем этой теоремы является теорема о том, что всякую область регулярности можно аппроксимировать изнутри последовательностью областей, ограниченных конечным числом аналитических гиперповерхностей. В работе доказывается также, что если оболочка области *B* конвексна по отношению к классу *K* всех полиномов, то всякая регулярная в *B* функция разлагается в равномерно сходящийся внутри *B* ряд по полиномам.

Позднее подобные теоремы были доказаны при более общих предположениях японским математиком Ока и послужили началом развития большой теории аппроксимации функций.

Одной из важнейших задач в теории аналитических функций двух комплексных переменных является изучение связи между ростом функции и распределением ее значений. Эти вопросы стали одной из тем исследований Е.Н. Аравийской.

В работе, опубликованной в «Известиях НИИММ» [156], Е.Н. Аравийская изучает рост аналитической функции двух комплексных переменных с заданными нуль-поверхностями. Рассматривается аналитическая функция $f(z_1, z_2)$ двух комплексных переменных в односвязной однолистной конечной области *B* в пространстве (z_1, z_2); причем

$$A = \int_B \left(\ln\left| f\left(z_1, z_2\right)\right|\right)^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty,$$

а $\ln |f(z_1, z_2)|$ будет правильной бигармонической функцией в области *B'*, полученной из *B* исключением всех нуль-поверхностей функции $f(z_1, z_2)$. Прежде всего доказывается неравенство

$$\left|\ln\left|f(z_1,z_2)\right|\right| \le \sqrt{AH(z_1,z_2)},$$

которое позволяет поставить вопрос об оценке роста ананалитических функций в данной области при помощи ядровой функции $H(z_1, z_2)$. Говорят, что точка Q на границе области B удовлетворяет условию A_α, если существует прямая, проходящая через точку Q, и угол α такие, что все точки, достаточно близкие к Q и лежащие внутри конуса с вершиной в Q, для которого осью служит указанная прямая, и раствора α, принадлежат области B и не принадлежат ни одной из нуль-поверхностей функции $f(z_1, z_2)$. Тогда имеет место следующее утверждение: если граница области B и распределение нуль-поверхностей аналитической функции $f(z_1, z_2)$ таково, что в точке Q выполняется условие A_α, то

$$\lim\left|1-z_2^*\right|^{\frac{3\nu}{2}+1}\left|\ln\left|f(z_1,z_2)\right|\right| < \infty,$$

z_2^* стремится к 1 по оси $0x_2^*$, где ν и α удовлетворяют условию

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\nu} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}.$$

В семинаре по функциям двух комплексных переменных в начальный период его деятельности были изучены и некоторые другие вопросы, подробные результаты по которым не были опубликованы. Так, Н.П. Романов рассмотрел обобщение теоремы Фрагмена–Линделефа на случай двух комплексных переменных, характеризующей поведение функции при приближении к двумерной поверхности на трехмерной границе области. П.М. Булат рассмотрел класс гармонических функций трёхмерного пространства, имеющих эллипс «особой линией». Для них указываются поверхности, где полученные функции принимают алгебраические значения. А.В. Лебедев, работавший в Томском университете несколько лет после окончания университета в 1936 г., показал существование пары функций двух комплексных переменных с заданным якобианом, применяя разложение по системе ортонормированных функций. Работая с 1948 г. в Астраханском педагогическом институте, А.В. Лебедев в 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию, в которой рассмотрел условия однолистности аналитической функции в выпуклой области.

§ 12

Теория чисел в Томске с 1932 по 1944 г. была представлена Николаем Павловичем Романовым. В Томск Н.П. Романов приехал после окончания Иркутского университета и аспирантуры при Московском университете, где его научными руководителями были профессор А.Я. Хинчин, профессор, член-корреспондент АН СССР Л.Г. Шнирельман и академик О.Ю. Шмидт. При защите кандидатской диссертации в 1935 г. ему была присуждена сразу степень доктора физико-математических наук. В Томске Н.П. Романов был доцентом, а с 1937 г. – профессором. В период работы в Томске Н.П. Романов был заведующим кафедрой алгебры и теории чисел Томского государственного университета, читал разнообразные курсы лекций и проводил математические семинары с новой тематикой, что весьма способствовало повышению уровня математической культуры в Томске.

Первые научные работы Н.П. Романова относятся к аддитивной теории чисел. Используя понятие плотности последовательности положительных целых чисел, введенное Л.Г. Шнирельманом и получившее развитие в трудах советских и зарубежных математиков А.Я. Хинчина, А.А. Бухштаба, И. Шура, Д.А. Райкова, Г. Дэвенпорта, П. Эрдеша и других, Н.П. Романов доказал в 1933–1934 гг. замечательные теоремы о числах, представимых в виде суммы простого числа и степени целого числа. Им доказаны следующие две основные теоремы.

Теорема 1. В каждом интервале $(0, x)$ содержится более ax чисел, представимых в виде суммы простого числа и k-й степени целого числа, где a – положительная постоянная, зависящая только от k. Или, иными словами, последовательность всех чисел, разложимых на сумму простого числа и k-й степени, есть последовательность положительной плотности.

Теорема 2. В каждом интервале $(0, x)$ содержится более bx чисел, представимых в виде суммы простого числа и степени заданного целого числа a, где b – положительная постоянная, зависящая только от a.

Указанные работы Н.П. Романова получили высокую оценку и послужили основой для дальнейших исследований. Известный математик Э. Ландау исследовал характер зависимости p от a, а также получил оценку для суммы одного ряда, сходимость которого была доказана Н.П. Романовым. Известные математики П. Эрдеш и П. Туран дали обобщение теоремы Н.П. Романова и дальнейшее улучшение оценки Э. Ландау. Некоторые работы П. Эрдеша и П. Турана, связанные с исследованиями Н.П. Романова, были опубликованы в Томске.

Заметка этих авторов «Об одной теореме из теории чисел» [298] представляет собой выдержку из письма к Н.П. Романову и содержит обобщение теоремы Романова о сходимости одного теоретико-числового ряда. В другой заметке [299] дано упрощение доказательства Э. Ландау о верхней границе суммы того же ряда.

П. Эрдеш в «Заметке о некоторых свойствах целочисленных последовательностей» [300] дает оценку для количества чисел последовательности целых чисел, не превосходящих числа *n,* таких, что ни одно из произведений любых двух чисел последовательности не делится ни на одно из остальных. В 1935 г. Н.П. Романов значительно улучшил результат Л.Г. Шнирельмана по проблеме Гольдбаха в ослабленной постановке. Известный результат Л.Г. Шнирельмана состоял в том, что была доказана возможность представления любого целого числа в виде суммы ограниченного числа простых чисел, причем для верхней границы числа простых слагаемых, необходимых для представления достаточно больших чисел, было указано число 100 000.

Н.П. Романов, проведя более точные оценки, доказал, что верхняя граница может быть снижена до 2208 (в тексте статьи содержалась ошибка, замеченная впоследствии автором, поэтому значение 1104 оказалось неверным). Эта работа Н.П. Романова положила начало дальнейшим исследованиям по снижению постоянной Л.Г. Шнирельмана.

В результате ряда исследований, выполненных до 1963 г., было доказано, что натуральное число, большее единицы, есть сумма двадцати или менее простых чисел.

В работе 1937 г. «Об аддитивных свойствах общих числовых последовательностей» [235] изучаются средние значения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k2} / n)$, указывающей число чисел интервала $(1, n)$, представимых или в форме x_i, или y_i, или $x_i + y_i$.

Сама функция имеет сложную арифметическую структуру, но ее средние значения выражаются через элементарные функции. Нахождение этих средних удается произвести методами комбинаторики. В статье приводится выражение для среднего арифметического рассматриваемой функции, которая называется основной функцией аддитивной теории чисел. В работе [236] 1938 г. Н.П. Романов занимается определением среднего квадратичного этой функции. Определение среднего квадратичного также проводится методами комбинаторики, но для получения приходится попутно решать ряд трудных комбинаторных задач.

К этим исследованиям Н.П. Романова примыкает работа [164] П.М. Булата, опубликованная в «Известиях НИИММ», в которой дана асимптотическая оценка средних значений основной функции аддитивной теории чисел $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k1}; y_1, y_2, \ldots, y_{k2} / n)$, исходя из найденных средних значений при некоторых частных предположениях относительно k_1 и k_2 и последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$. В следующей работе Н.П. Романов ставит вопрос об определении среднеарифметического высшего порядка основной функции аддитивной теории чисел и находит выражение для ее среднего кубического значения.

Дальнейшие работы Н.П. Романова связаны с развитием и применением операторных методов в теории чисел [237]. Идея применения функционального анализа к вопросам теории чисел была высказана Л.Г. Шнирельманом. В частности, в беседе с Н.П. Романовым в 1935 г. Л.Г. Шнирельман указывал, что некоторые арифметические тождества, связанные с распределением простых чисел, могут быть получены при помощи введенной им «функциональной» дзета-функции. В работах Н.П. Романова эти идеи были успешно разработаны и получили дальнейшее развитие и обобщение. Н.П. Романов рассматривает последовательности дистрибутивных операторов $L_1, L_2, \ldots$, отображающих функции семейства F в функции того же семейства и обладающих М-свойством, состоящим в том, что $L_n L_m = L_{nm}$. Функциональная дзета-функция определяется как функциональный оператор вида

$$\zeta(s, L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s},$$

определенный на множестве F функций. Для функциональной дзета-функции получено обобщение тождества Эйлера для дзета-функции. Далее оказывается возможным дать обобщение других теоретико-числовых тождеств, например тождества Ламберта и др. Для функциональной дзета-функции получено также функциональное уравнение, аналогичное функциональному уравнению Римана для обычной дзета-функции. Введена была и функциональная гамма-функция.

Введение функциональных дзета- и гамма-функций проведено на основе теории однопараметрических групп линейных операторов.

Н.П. Романов нашел разнообразные методы построения однопараметрических групп линейных операторов в различных функциональных пространствах. Специально рассматривается в работах Н.П. Романова применение гильбертова пространства к вопросам теории чисел. Идеи применения функционального анализа в теории чисел приводят и к ряду интересных аналитических приложений. В нескольких работах Н.П. Романова изучаются ортонормированные системы функций, рассматривается вопрос о полноте системы функций $\{\varphi(nx)\}$.

§13

Как уже упоминалось выше, редакция «Известий НИИММ» с целью усиления научных связей принимала для опубликования работы иногородних и зарубежных ученых. Публикация значительной части таких работ связана с научными интересами томских математиков. Статья И.И. Привалова «Современные проблемы теории функций комплексного переменного» и «Обобщение метода Линделефа» отражают лекции и доклады, сделанные им во время его пребывания в Томске осенью 1934 г. В связи с интересом томских математиков к вопросам интегрального представления функций комплексного переменного была опубликована статья И.И. Привалова и его ученика Г.А. Бродского «О предельных значениях интеграла типа Коши–Стильтьеса» [163]. С приездом в Томск из Ленинграда профессора Н.С. Кошлякова для чтения курса математической физики и специального курса «Принцип Гамильтона в математической физике» связывается опубликование его статьи «Об одной предельной формуле Кронекера…» [198] в «Известиях НИИММ». Здесь же была опубликована статья «К вопросу о местном рассечении пространства» [186] польского математика К. Заранкевича, посетившего Томск после топологической конференции в Москве в 1935 г.

По желанию авторов в «Известиях НИИММ» была перепечатана статья А. Эйнштейна и Н. Розена «О гравитационных волнах» [301], в которой дано строгое решение задачи для цилиндрических гравитационных волн. Эта работа представляла интерес для томских математиков, занимавшихся задачами математической физики. В статье [244] польского академика В. Серпинского доказывается одна теорема о двойных последовательностях натуральных чисел. Опубликование статьи С.П. Финикова «Сопряженные сети с общими осями» [275] и работы Л.С. Ермолаева «Дифференциальная геометрия векторного поля, комплекс прямых, определяемых полем» [185] отразило повышение интереса томских математиков к вопросам дифференциальной геометрии. Публикация нескольких работ [241–243] Н.А. Селиванова показывала интерес томских математиков к вопросам метрической теории функций действительного переменного.

Картина развития математики в Томске была бы неполной, если не рассмотреть работы по прикладным математическим наукам, прежде всего по механике и астрономии. О некоторых работах Н.Н. Горячева по астрономии, работах по механике Е.Д. Томилова, П.П. Куфарева, М.С. Горохова уже было сказано.

Отметим еще работы А.А. Гриба, работавшего в Томском университете на кафедре теоретической механики с 1937 по 1940 г. после окончания аспирантуры при Ленинградском университете, ученика академика С.А. Христиановича. В Томске им была закончена и напечатана в «Известиях НИИММ» работа «Установившееся движение грунтовых вод при наличии дренажной трубы, свободной поверхности и водонепроницаемого слоя в виде угла», в которой решается задача определения величин, характеризующих движение жидкости и, в частности, свободной поверхности в зависимости от угла наклона водонепроницаемой стенки к горизонтальному подстилающему слою, параметров положения стока и его мощности. В работе получены дифференциальные уравнения движения грунтовых вод и указаны граничные условия. Для решения задачи используются методы конформного отображения и метод годографа. В кандидатской диссертации, защищенной в Томске в 1940 г., А.А. Гриб для изучения движения газов при детонации применил аппарат точных уравнений газодинамики. Основные результаты работы были опубликованы в статье «Распространение плоской ударной волны при обыкновенном взрыве у твердой стенки».

Деятельность А.А. Гриба в Томске оказала влияние на научное направление исследований кафедры теоретической механики. Вместо вопросов теории упругости основным направлением стали проблемы гидроаэромеханики и газовой динамики, соответственно изменилась и специализация студентов.

К концу 30-х гг. в коллективе томских математиков произошли большие изменения. По разным причинам выбыло из Томска значительное число математиков. С другой стороны, в коллектив томских математиков влилось новое пополнение выпускников университета и педагогического института, а также прибывших из других городов.

§ 14

К началу 40-х гг. выявились основные направления в исследованиях томских математиков, которые продолжали развиваться и в последующие десятилетия: теория однолистных функций комплексного переменного и ее приложения к вопросам теории упругости и гидромеханики, теория функций двух и многих комплексных переменных, некоторые вопросы функционального анализа и математической физики, исследования по аэромеханике и газовой динамике, задачи небесной механики, исследование геометрических образов трехмерного пространства методами дифференциальной геометрии.

Теория однолистных функций и ее приложения являются основным направлением научной деятельности профессора П.П. Куфарева и его учеников.

Павел Парфеньевич Куфарев (1909–1968) – уроженец Томска. В Томском университете П.П. Куфарев прошел весь путь от студента до профессора. Большая научная, педагогическая, организационная, редакторская работа П.П. Куфарева оказала значительное влияние на развитие математических исследований и математического образования в Томске и Сибири. Научные результаты П.П. Куфарева получили широкую известность и признание в кругах специалистов.

В 1968 г. П.П. Куфареву было присвоено звание заслуженного деятеля науки РСФСР.

Как уже отмечалось, первые научные работы П.П. Куфарева относятся к теории упругости. После защиты кандидатской диссертации П.П. Куфарев решил несколько задач по определению напряжений для анизотропных тел: эллиптической пластинки, клина, бесконечной полосы (совместно с В.А. Свекло). Решение всех этих задач проведено с помощью функций комплексного переменного. Позднее основной в исследованиях П.П. Куфарева становится теория однолистных функций.

В дальнейших исследованиях, составивших содержание его докторской диссертации, П.П. Куфарев развивает метод параметрического представления для семейств однолистных функций. В теории однолистных функций, как известно, изучаются внутренние свойства конформных отображений. Исследование многих вопросов в этой теории может быть сведено к изучению экстремумов некоторых функционалов на классах однолистных аналитических функций. Одним из важных классов аналитических функций является класс S функций, однолистных в единичном круге и удовлетворяющих условиям $f(0) = 0, f'(0) = 1$. В методе параметрических представлений функция класса S равномерно аппроксимируется функциями, зависящими от одного действительного параметра и удовлетворяющими уравнению Лёвнера

$$\frac{df(z,t)}{dt} = -f(z,t)\frac{\lambda(t)+f(z,t)}{\lambda(t)-f(z,t)}.$$

П.П. Куфарев провел исследование свойств решений уравнения Лёвнера и получил простые геометрические условия для того, чтобы интеграл уравнения отображал круг на плоскость с разрезом по заданной кривой некоторых классов (кривая Жордана, гладкая кривая и др.). П.П. Куфарев ввел в исследования обобщенное уравнение Лёвнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} + zP(z,t)\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} = 0,$$

где $P(z, t)$ – регулярная в единичном круге функция с положительной вещественной частью. П.П. Куфаревым подробно изучены геометрические свойства отображающих функций в зависимости от свойств данной функции $P(z, t)$, исследована задача определения уравнения Лёвнера для функции, отображающей круг на плоскость с переменным разрезом, предложен численный метод определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля. Обобщенное уравнение Лёвнера позволило решить ряд новых задач. Работы П.П. Куфарева по методу параметрических представлений и обобщенному уравнению Лёвнера послужили основой для многочисленных новых исследований П.П. Куфарева и его учеников.

Несколько вне этого круга работ П.П. Куфарева находится его статья [203], опубликованная в «Известиях НИИММ», в которой доказывается теорема о поведении отображающей функции на границе. Показано, что при некоторых условиях на границу области отображающая функция и ее производные до определенного порядка при приближении точки изнутри области к граничной точке стремятся к определенным предельным значениям.

§ 15

Оживление интереса к вопросам дифференциальной геометрии в Томске связано с приездом в 1939 г. на постоянную работу в Томск Н.Г. Туганова.

Николай Георгиевич Туганов (1901–1956) родился в Благовещенске в семье учителя. В начале 20-х гг. Н.Г. Туганов учился в Томском университете и проявил интерес к дифференциальной геометрии под влиянием профессора Ф.Э. Молина. Н.Г. Туганов окончил в 1929 г. Ленинградский университет, а затем работал в высших учебных заведениях Ленинграда. С сентября 1939 г. Н.Г. Туганов работал доцентом и заведующим кафедрой геометрии Томского университета с перерывом в период Великой Отечественной войны. В 1940 г. он защитил кандидатскую диссертацию, им опубликовано 12 научных статей и к 1956 г. была подготовлена докторская диссертация. С самого начала своей деятельности в Томске Н.Г. Туганов проводил кропотливую педагогическую и организационную работу по привлечению молодых математиков к дифференциально-геометрическим исследованиям. Система специальных курсов и семинаров последовательно подводила его слушателей к самостоятельным исследованиям. Беспредельно преданный науке и педагогической работе, Н.Г. Туганов с большой требовательностью, любовью и ответственностью относился к подготовке будущих математиков.

В работах, выполненных до 1940 г. и составивших его кандидатскую диссертацию, Н.Г. Туганов изучает линии на поверхности, геодезическое кручение, нормальная кривизна которых связана линейным соотношением с постоянными коэффициентами:

$$A\frac{1}{T_g}+B\nu+C\frac{1}{l_g}+D=0\cdot$$

Для изучения линий на поверхности Н.Г. Туганов использовал трехгранник, построенный на касательной к кривой и нормали к поверхности (так называемый полуканонический репер).

Основной результат Н.Г. Туганова состоит в том, что линии указанного выше класса и только они допускают присоединение к каждой из них другой линии на другой поверхности так, что их полуканонические реперы оказываются неизменно связанными (т.е. векторы одного репера имеют постоянные координаты относительно другого репера). Аналогичным свойством характеризуются кривые Бертрана (относительно репера Френе).

В дальнейшем аналогичные задачи были поставлены и решены для линейчатых и других геометрических образов.

Они получили общее название задач Туганова. Диссертация Н.Г. Туганова является первым исследованием, в котором систематически применяется идея метода репеража подмногообразий. Н.Г. Туганов подробно изучил все подклассы введенного им класса линий. Отметим некоторые конкретные результаты.

Если геодезическое кручение $1/T_g$ и нормальная кривизна ν удовлетворяют линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\operatorname{ctg}\phi}{T_g} - \nu = \frac{1}{d},$$

то существует вторая линия, присоединенная к первой, которая лежит на второй поверхности, параллельной первой; $d = \mathrm{const}$ есть отрезок общей нормали между соответствующими точками обеих поверхностей, а $f = \mathrm{const}$ есть угол между касательными двух соответственных кривых. При всяком значении постоянных f и d произвольная поверхность S несет два семейства линий, которые образуют между собой угол $\pi/2 - f$. Нормальные кривизны их связаны соотношениями

$$\nu_1 + \nu_2 = J\cos^2\phi - \frac{2\sin^2\phi}{d}, \quad \nu_1\nu_2 = K\cos^2\phi + \frac{\sin^2\phi}{d^2},$$

где J и K суть средняя и полная кривизны поверхности.

Аналогичные построения получаются при замене пары параллельных поверхностей парой фокальных поверхностей конгруэнции, луч которой является общей нормалью пары сопряженных кривых. При таком обобщении нормальная кривизна заменяется геодезической. После защиты кандидатской диссертации Н.Г. Туганов провел исследование поверхностей, конформно изображающихся посредством нормалей на одну полость своей поверхности центров [267].

§ 16

Интерес к вопросам функционального анализа в Томске проявляется с 1940 г. С этого времени читаются курсы и проводятся семинары по некоторым вопросам функционального анализа. В 1940 г. З.И. Клементьев, приехавший в Томск по окончании аспирантуры в Ленинградском университете, защитил кандидатскую диссертацию, посвященную исследованию некоторых полуупорядоченных пространств, основы теории которых были даны в работах Л.В. Канторовича в 1935–1937 гг. З.И. Клементьев указал построение расширенных пространств типа K_5 числовых последовательностей и суммируемых функций, рассмотрел вопросы сходимости, полноты и сепарабельности в полуупорядоченных пространствах.

С 1940 по 1944 г. в Томском университете работал доцент В.И. Соболев, ученик Л.А. Люстерника и А.И. Плеснера по аспирантуре в Московском университете. В.И. Соболев в своей кандидатской диссертации расширил результаты Л.А. Люстерника о существовании бесконечного множества собственных значений для некоторых нелинейных операторов. Им доказано, что для каждого вполне непрерывного симметричного нечетного однородного позитивного оператора в гильбертовом пространстве существует последовательность положительных стремящихся к нулю собственных значений. Указывается возможность перенесения результата на нелинейные операторы, определенные в пространстве L_p. Дано применение полученных результатов к некоторым интегральным уравнениям и операторам градиента позитивных функционалов в гильбертовом пространстве. В Томском университете В.И. Соболев читал лекции по основам функционального анализа и по спектральной теории линейных операторов, участвовал в работе возникшего в 1942 г. семинара по функциональному анализу, где изучались вопросы спектральной теории линейных операторов и теории полуупорядоченных пространств. В 1944 г. В.И. Соболев перешел на работу в Воронежский университет, который он окончил в 1936 г., позднее защитил докторскую диссертацию, был профессором и директором института математики Воронежского университета.

В 1940–1944 гг. в Томском педагогическом институте работал ученик М.А. Лаврентьева Л.И. Волковыский, занимавшийся исследованием типа односвязных римановых поверхностей.

На кафедре астрономии в 1940–1942 гг. работал доцентом ученик профессора М.Ф. Субботина Глеб Александрович Чеботарев (1913–1975). В своих основных научных трудах он разрабатывал теорию движения малых планет, занимался вопросами движения искусственных спутников Земли и малых тел Солнечной системы. Автор книг «Аналитические и численные методы небесной механики» и «Малые планеты». С 1943 г. работал в Институте теоретической астрономии АН СССР, в 1944 г. – его директор. По совместительству в 1951–1960 гг. был заместителем, а затем директором библиотеки АН СССР.

§ 17

В годы Великой Отечественной войны (1941–1945), несмотря на уход части научных работников-математиков в армию (Н.Г. Туганов, Ю.В. Чистяков, Г.И. Назаров, Р.Н. Щербаков, Л.И. Свиридов, А.А. Сивков, П.М. Булат, И.И. Гаврилкин, В.М. Лейкин и другие), томские математики продолжали учебную и научную работу в высших учебных заведениях. В Томске не прекращалась деятельность научных семинаров, проводилась исследовательская работа по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики, проходили защиты кандидатских и докторских диссертаций. В 1943 г. докторские диссертации в ученом совете Томского государственного университета защитили П.П. Куфарев, И.С. Куклес по качественной теории дифференциальных уравнений и К.Л. Баев по небесной механике. Среди выпускников-математиков в 1942 г. был Н.Н. Яненко (1921–1984), впоследствии ставший академиком АН СССР и Героем Социалистического Труда.

В связи с эвакуацией из центральных районов СССР в период Великой Отечественной войны в Томске находились несколько видных советских математиков.

В 1941–1943 гг. в Томском педагогическом институте заведовал кафедрой математики профессор П.К. Рашевский, читавший также курсы лекций в университете и принимавший активное участие в работе математических семинаров. В семинаре по функциональному анализу им было дано изящное изложение спектральной теории линейных операторов в геометрической форме.

В Томском политехническом институте некоторое время работал профессор К.П. Персидский. В Томском электромеханическом институте инженеров транспорта с 1941 по 1953 г. работал профессор С.А. Чунихин. В 1943–1944 гг. в Томск для чтения специальных курсов лекций по газодинамике приезжал профессор Ф.И. Франкль. В тематику исследовательских работ томских математиков и механиков вошли темы оборонного характера. Были выполнены работы по теории винтовых пружин (П.К. Рашевский, П.П. Куфарев, Е.Н. Аравийская, Е.Д. Томилов), по теории уравновешивающих механизмов артиллерийских систем (В.И. Соболев), по теории теплопроводности в цилиндрах (Е.Д. Томилов). Работа П.К. Рашевского «О равновесии упругих тел с винтовой симметрией» [234] была опубликована в 1944 г. в «Математическом сборнике», работа П.П. Куфарева «Об одном частном случае колебаний винтовой пружины со сталкиванием витков» [204] появилась в 1948 г. в журнале «Прикладная математика и механика», работа Е.Д. Томилова «О статической теории винтовых пружин большой мощности» [263] напечатана в «Ученых записках» Томского университета в 1948 г.

Рассмотренный в этой главе период может быть охарактеризован как период становления основных направлений математических исследований в Томске. Созданный в 1917 г. физико-математический факультет в Томском университете с несколькими математическими кафедрами стал постепенно центром научных исследований по математическим дисциплинам и подготовки кадров в Томске.

Большое значение для развития исследований по математике и механике в Томске имела деятельность Научно-исследовательского института математики и механики при Томском государственном университете с 1932 по 1941 г. Позднее центрами научной работы становятся кафедры и научные семинары.

В Томском семинаре по аналитическим функциям с 1935 г. было положено начало исследованиям отечественных математиков по теории функций нескольких комплексных переменных. Участники этого семинара впоследствии возглавили исследовательские группы по теории функций многих комплексных переменных в других городах (Б.А. Фукс, А.А. Темляков).

С 1932 по 1944 г. интенсивные исследования по теории чисел проводились Н.П. Романовым.

В период Великой Отечественной войны томские математики и механики своей научной, учебной и общественной деятельностью внесли вклад в общее дело Победы.

3. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В ТОМСКЕ ПОСЛЕ ВЕЛИКОЙ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ВОЙНЫ

§ 1

После Великой Отечественной войны перед страной возникли новые задачи восстановления и развития народного хозяйства, науки и образования. Ряд правительственных решений и постановлений способствовал развертыванию научно-исследовательской работы и росту научно-педагогических кадров.

В современных условиях создались совершенно новые возможности для применения математических методов в различных областях человеческой деятельности. Особенно возросла роль математики в жизни общества и развитии прикладных наук. Новые запросы естествознания и техники привели к глубокому преобразованию математики, происходящему на основе объединения методов математики и электроники. Создание быстродействующих электронных вычислительных машин позволило фактически выполнять вычисления, ранее немыслимые. Открылись новые возможности решения задач, считавшихся неразрешимыми. В связи с этим потребность в высококвалифицированных специалистах-математиках увеличивается с каждым годом. Такова общая обстановка, в которой происходило развитие математики в рассматриваемый период и в Томске.

В послевоенный период коллектив томских математиков непрерывно растет и количественно, и качественно. Расширяются и укрепляются квалифицированными работниками математические кафедры всех высших учебных заведений Томска. В Томском университете в 1948 г. выделяется механико-математический факультет, объединяющий математические кафедры (математического анализа, общей математики, алгебры), кафедру теоретической механики, кафедру астрономии и геодезии. Организующими центрами научно-исследовательской работы по математике являются кафедры и научные семинары. В 1965 г. в Томске открыт вычислительный центр.

В университете и других высших учебных заведениях Томска организуются новые математические кафедры. Томские математики принимают участие во многих математических конференциях, совещаниях, симпозиумах, съездах и конгрессах, в том числе международных, выступая с докладами и сообщениями о проводимых исследованиях. Работы томских математиков публикуются в местных, сибирских всесоюзных и зарубежных изданиях. Систематически проводятся внутривузовские научные конференции.

В 1948 г. в связи с юбилеем Сибирского физико-технического института была проведена Всесибирская конференция физиков и математиков в Томске, материалы которой были опубликованы в «Трудах СФТИ».

С 1960 г. по инициативе математиков и механиков Томского университета в Томске регулярно проводятся Сибирские научные конференции по математике и механике, в которых принимают участие ученые многих городов Советского Союза, и не только Сибири. В Томске изданы сборники докладов всех состоявшихся конференций. Механико-математическая серия «Трудов Томского государственного университета им. В.В. Куйбышева» стала выходить в виде тематических сборников: «Вопросы математики», «Вопросы геометрической теории функций», «Геометрический сборник». Объединенный совет по присуждению ученых степеней по физико-математическим наукам (механика и математика) при Томском государственном университете, существующий с 1960 г., проводил большую работу по организации защиты кандидатских и докторских (с 1963 г.) диссертаций по математике и механике.

Премии Томского университета за научные труды были присуждены в разные годы математикам: профессорам С.А. Чунихину, П.П. Куфареву, Г.Д. Суворову, Р.Н. Щербакову, И.А. Александрову, доценту Л.З. Круглякову.

Основные направления научных исследований в рассматриваемый период остаются прежними: теория функций комплексного переменного с несколькими специализациями, дифференциальная геометрия, алгебра, некоторые вопросы математической физики и функционального анализа.

В конце 40-х – начале 50-х гг. более интенсивными были исследования по топологии. Проводились исследования по теоретической и прикладной механике, астрономии, геодезии, методике преподавания математики, вычислительной математике и некоторым другим вопросам.

В научно-исследовательскую работу математических кафедр и научных семинаров с каждым годом смелее и шире привлекалась студенческая молодежь, что создавало прочные основы для более успешного развития математических исследований.

Включение в учебный план механико-математического факультета практики по ведению научной работы для студентов специальности «математик-исследователь» положительно сказалось на качестве курсовых и дипломных работ. Нередкими стали случаи опубликования результатов студенческих работ в научных журналах. Кафедра теории функций Томского университета (заведующий кафедрой Г.Д. Суворов) в 1964 г. была отмечена как лучшая по организации научной работы студентов.

Возникновение новых факультетов и кафедр механико-математического профиля, расширение тематики исследований не позволяют автору охватить широкий круг вопросов развития математики в Томске, в частности разделов прикладной математики. Поэтому дальнейшее изложение ограничивается обзором исследований, проводимых сотрудниками механико-математического факультета Томского государственного университета.

§ 2

Важнейшей областью научно-исследовательской деятельности томских математиков в течение нескольких десятилетий является теория функций комплексного переменного. Исследования ведутся по нескольким направлениям.

Исследованиями по теории однолистных функций занималась значительная группа томских математиков, возглавляемая профессором П.П. Куфаревым.

Для развития исследований в указанном направлении большое значение имела работа П.П. Куфарева «Об однопараметрических семействах аналитических функций» [205], опубликованная в «Математическом сборнике» в 1943 г.

В монографии «Параметрические продолжения в теории однолистных функций» (М.: Наука, 1976) И.А. Александров дал изложение работ этого направления, связанных с теорией уравнения Лёвнера и данного П.П. Куфаревым его обобщения, получившего название уравнения Лёвнера–Куфарева.

Исследования П.П. Куфарева, начатые в его докторской диссертации (1943 г.), получили развитие в работах ряда его учеников и последователей. В.С. Федорова в кандидатской диссертации и двух статьях [269, 270], опубликованных в «Ученых записках» Томского педагогического института, рассматривала некоторые интегралы обобщенного уравнения Лёвнера и частные виды этого уравнения, решения которого сохраняют симметричность отображаемой области. Н.В. Попова [231], применяя методы П.П. Куфарева, изучала отображения, осуществляемые интегралами одного класса дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dw}{dt} = P(w,t),$$

где $P(w, t)$ – рациональная функция относительно комплексного переменного w при значениях действительного переменного t, принадлежащих некоторому замкнутому интервалу, удовлетворяющая еще некоторым дополнительным условиям. В работе доказывается, что интеграл изучаемого уравнения $w = w(t, w_0, t)$, рассматриваемый как функция начального значения w_0, отображает взаимно однозначно и конформно область, полученную из плоскости проведением разрезов по конечному числу простых гладких кривых Жордана, на область такого же вида.

Ю.В. Чистяков разработал способ приближенного определения функции, конформно отображающей круг на области, ограниченные дугами окружностей и отрезками прямых. Решение уравнения Лёвнера, которому удовлетворяет отображающая функция, сводится после применения к функции дифференциального оператора Шварца к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах рассматриваемого периода П.П. Куфарев для исследования экстремальных задач в теории однолистных функций развивает вариационный метод Г.М. Голузина. Было показано, что основная формула метода Г.М. Голузина может быть получена из результатов П.П. Куфарева. В ходе исследований было достигнуто объединение вариационного метода Голузина с методом параметрических представлений, что позволило свести экстремальную задачу теории однолистных функций к некоторой краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В ряде заметок и статей П.П. Куфарева, опубликованных в 1947–1959 гг., рассматриваются отдельные вопросы и задачи теории однолистных функций: новый способ вывода дифференциального уравнения для экстремальной функции в некоторых задачах, когда экстремальная область получается из плоскости проведением разреза по конечному числу аналитических дуг; свойство экстремальных областей в связи с задачей коэффициентов; доказательство теоремы об оценке для вещественной части коэффициентов функции из класса S, дающей максимум некоторому функционалу, и другие экстремальные задачи теории однолистных функций.

В совместной работе [207] П.П. Куфарев и М.Р. Куваев дали вывод дифференциального уравнения типа Лёвнера для функции, отображающей круг на однопараметрическое семейство областей, полученных из заданной n-связной области проведением переменного разреза. Полученные результаты показывают возможность применения метода параметрического представления, ранее развитого П.П. Куфаревым для односвязных областей, при исследовании экстремальных задач конформных отображений для многосвязных областей. В заметке 1950 г. П.П. Куфарев решил для частного случая задачу М.А. Лаврентьева об оценке сверху произведения модулей первых производных в нулевой точке для функций, конформно отображающих единичный круг на взаимно неналегающие области, принадлежащие данному кругу. В работе [206] П.П. Куфарева и А.Э. Фалес даны обобщение этой задачи для дополнительных областей и оценка функционала

$$\left|f_1'(0)\right|^{\alpha}\left|f_2'(0)\right|^{\beta}$$

при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. В работе найдена кривая, дающая указанному функционалу максимальное значение. П.П. Куфарев совместно с Н.В. Семухиной [208] рассмотрели решение одной задачи Н.Н. Лузина о поведении аналитической функции на границе круга. Они же получили обобщенную вариационную форму Г.М. Голузина и применили ее к проблеме коэффициентов, где ими доказана теорема: если экстремальной областью в задаче коэффициентов является плоскость с прямолинейными разрезами, то справедливо неравенство $|C_n| \geq n$, т.е. имеет место положительное решение проблемы коэффициентов. В дальнейших работах Н.В. Гениной (Семухиной) было показано, что экстремальная функция для различных изучаемых классов функций удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению.

П.П. Куфаревым и его учениками успешно было проведено решение некоторых прикладных задач гидромеханики. Рассматривая одну задачу теории фильтрации (задача о перемещении контура нефтеносности), П.П. Куфарев совместно с Ю.П. Виноградовым свели решение краевой задачи теории аналитических функций к решению системы интегральных уравнений. В ряде статей П.П. Куфаревым рассмотрены другие частные задачи о контуре нефтеносности (для круга, для полосы с цепочкой скважин, для круга с любым числом скважин).

В работе, совместной с П.П. Астафьевым и К.О. Болецким [209], рассмотрены задачи о перемещении контура нефтеносности. Мероморфными решениями, рассмотренными в работе, можно аппроксимировать решение любой задачи о перемещении контура нефтеносности. Все полученные решения имеют физический смысл при однолистной отображающей функции. Интересны также решения П.П. Куфарева задач о струйном обтекании дуги окружности и о вихре и источнике под поверхностью жидкости. В последней задаче определяется вид меняющейся со временем области, заполненной жидкостью, и дается характеристика движения. Решение краевой задачи оказывается эквивалентным решению двух интегро-дифференциальных уравнений при некоторых условиях.

Ряд задач теории фильтрации рассмотрела В.Г. Пряжинская, применяя метод П.П. Куфарева. Ею изучена задача о растекании жидкости под действием силы тяжести в полубесконечной области, задача о перемещении контура нефтеносности для двусвязной области, проведено исследование частных точных решений о неустановившемся движении грунтовых вод в слое бесконечной глубины в классе мероморфных функций. Последняя задача сведена к системе интегральных уравнений, обоснование метода решения которых было дано в совместной работе П.П. Куфарева и В.Г. Пряжинской. Решение задачи о струйном обтекании дуги окружности в полосе методом П.П. Куфарева дал В.А. Штанько. И.И. Козырев [197] исследовал решения задач Дирихле для двусвязных полигональных областей, применяя метод П.П. Куфарева. В.Н. Шепеленко продолжил исследования П.П. Куфарева по решению задач теории упругости для анизотропной полосы, сводящихся к нахождению двух аналитических функций при некоторых граничных условиях. Были рассмотрены: вторая основная задача теории упругости (на кромках полосы заданы компоненты вектора смещения), смешанная задача с заданием внешних усилий на одной кромке полосы и компонентов вектора смещения на другой и смешанная задача с заданием на обеих кромках полосы касательных напряжений и нормальной компоненты вектора смещения. Решения указанных задач получены в виде интегралов Фурье, для которых проведено доказательство сходимости.

Ученик П.П. Куфарева М.Р. Куваев дал обобщение уравнения типа Лёвнера для автоморфных функций на случай нескольких разрезов и новый вывод уравнения для двусвязных областей.

Б.Г. Байбарин продолжил исследования П.П. Куфарева по конформным отображениям полигональных областей. Им исследованы некоторые конкретные задачи Дирихле с полиномиальными граничными значениями для полигональной области и дано распространение метода на бесконечные полигональные области. Дополняя эти исследования, Б.Г. Байбарин рассмотрел отображения областей, ограниченных отрезками прямых и дугами окружностей. В.В. Черников посвятил ряд работ [287, 288] изучению экстремальных задач для класса однолистных функций с вещественными коэффициентами. Применяя вариационный метод Г.М. Голузина, он дал оценку некоторых функционалов и нашел функции, дающие рассматриваемым функционалам максимальные и минимальные значения. В частности, получены оценки для взаимного роста модуля функции и модуля производной для вещественных значений аргумента. В последующих работах В.В. Черникова изучаются некоторые функционалы и связанные с ними экстремальные задачи в классе ограниченных функций с вещественными коэффициентами. В.В. Черников провел обобщение вариационных методов для изучения экстремальных свойств функционалов для однолистных функций с вещественными коэффициентами, когда функционал определяется с помощью аналитической функции $(2n + 2)k$ комплексных переменных в полицилиндре.

Исследование некоторых функционалов в классе регулярных однолистных функций было проведено М.И. Редьковым. Им изучены области значений функционалов с помощью метода П.П. Куфарева, объединяющего вариационный метод Г.М. Голузина с методом параметрических представлений. Позднее изучались некоторые экстремальные задачи для более узких классов функций (ограниченных и с фиксированным первым коэффициентом). Перечисленные исследования показывают плодотворность метода П.П. Куфарева для широкого круга экстремальных задач теории однолистных функций.

П.П. Куфареву принадлежит обзорный доклад «Некоторые методы и результаты теории однолистных функций» [103], прочитанный на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г.

Часть рассмотренных исследований вошла в успешно защищенные кандидатские диссертации В.С. Федоровой, Н.В. Поповой, М.Р. Куваева, И.А. Александрова, В.В. Черникова, В.Г. Пряжинской, В.Н. Шеленко, Ю.П. Виноградова, М.И. Редькова, Б.Г. Байбарина, Н.В. Гениной, Ю.В. Чистякова, И.И. Козырева.

Есть все основания говорить о научной школе профессора П.П. Куфарева в теории однолистных функций. Ученики П.П. Куфарева работают во многих городах страны и успешно продолжают научные исследования в области теории однолистных функций.

Вариационные формулы, установленные для однолистных функций, отображающих круг на области различных классов (звездоообразные, выпуклые, почти выпуклые), послужили основой для исследования областей значений слабо дифференцируемых функционалов, в том числе для ряда функционалов, дающих геометрические характеристики отображений. В этом направлении развивались исследования ученика П.П. Куфарева И.А. Александрова. Сюда примыкают некоторые работы М.И. Редькова, В.В. Черникова и других. Результаты исследований И.А. Александрова составили содержание его докторской диссертации «Области значений функционалов и геометрические свойства функций», защищенной в 1963 г. И.А. Александрову принадлежат несколько обзорных статей и докладов, прочитанных на ряде конференций. Отметим доклады на сибирских конференциях по математике и механике: «Проблема коэффициентов в теории однолистных функций и результаты ее изучения» (1960), «Геометрические свойства однолистных функций» (1962), «Функционалы на классах однолистных функций» (1964) [111].

В первых работах [145, 146] И.А. Александрова были изучены области значений некоторых функционалов в классе функций однолистных и регулярных в круге (классы S и S_p) и дана геометрическая характеристика, позволяющая указать границы выпуклости и звездообразности. В этих работах была получена вариационная формула для однолистных регулярных в кольце звездообразных функций. В последующих исследованиях рассматриваются экстремальные свойства для других классов функций. Для вводимых в изучение классов функций доказываются общие свойства компактности, связности, изучаются дифференциальные свойства и выводятся вариационные формулы. Вводимое понятие слабой дифференцируемости позволяет дать аналитическую характеристику так называемых граничных функций. Многие задачи геометрической теории функций приводят к определению области значений некоторой системы слабо дифференцируемых функционалов, для чего оказывается достаточным найти граничную функцию. Граничные функции характеризуются как решения функциональных уравнений, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Специальному исследованию были подвергнуты экстремальные свойства классов S и Σ (Σ – класс голоморфных функций, заданных вне единичного круга, имеющих простой полюс на бесконечности и однолистных) относительно весьма общих функционалов.

Выделены также звездообразные отображения односвязных и двусвязных областей, экстремальные свойства которых были изучены совместно с В.В. Черниковым.

Вариационные методы были применены для получения некоторых оценок коэффициентов аналитических функций. С этой целью удается выделить группы функционалов полиномиального типа от коэффициента функций. Области значений таких функционалов могут быть полностью определены. Оценки коэффициентов удается распространить на случай функций многих комплексных переменных. Эти оценки значительно расширяют результаты А.А. Темлякова и И.И. Баврина, полученные методом интегрального представления для голоморфных функций двух комплексных переменных. Для областей значений некоторых функционалов в работах И.А. Александрова указаны полные сведения об их геометрической конфигурации, указаны граничные функции, произведена оценка искажения кривизны линий уровня и их ортогональных траекторий при однолистных отображениях. Вариационные формулы были получены и для некоторых классов неоднолистных аналитических функций. Вариационный метод исследования экстремальных задач позволил выделить функционалы, имеющие граничные функции на некомпактных классах. В работах И.А. Александрова были изучены также аналитические функции в двусвязных областях с переменными границами, начато изучение слабо дифференцируемых абстрактных функций со значением в комплексном гильбертовом пространстве, заданных на классах функций.

В работе «Области значений систем функционалов» [149] И.А. Александров изучает различные бесконечные системы функционалов на классах однолистных функций. Полученные результаты дают общую характеристику области значений непрерывной системы функционалов и граничных функций слабо дифференцируемой системы.

В ряде работ вариационные формулы были распространены на классы функций в круговом кольце, получены оценки различных функционалов на классах ограниченных функций, рассмотрены задачи на относительный экстремум, предприняты попытки постановки и исследования экстремальных задач для некомпактных классов функций. Развиваемая в этих исследованиях теория дифференцируемых функционалов на классах однолистных функций выдвигает ряд новых проблем, относящихся одновременно к теории функций и нелинейному функциональному анализу.

Применение метода параметрических представлений позволило В.И. Попову получить новым способом оценки для аргумента производной голоморфной однолистной функции, найденные ранее Г.М. Голузиным, точность которых была доказана И.Е. Базилевичем, и некоторые новые оценки с простым доказательством точности оценок.

Работы И.А. Александрова [150] дали новый подход к изучению свойств линий уровня при однолистных конформных отображениях. И.А. Александров и В.И. Попов дали полное решение задачи И.Е. Базилевича и Г.В. Корицкого о звездообразности дуг линий уровня для класса S и для других классов функций. Развитые при этом методы позволяют получить также и новые результаты.

Ю.А. Мартынов исследовал свойства дуг линий уровня при однолистных конформных отображениях с ограниченным вращением.

Р.С. Поломошнова изучала некоторые классы аналитических функций в круговом кольце. Вариационный метод распространен в ее работах на класс типично вещественных функций и класс звездообразных функций в круговом кольце. Были рассмотрены также неоднолистные классы функций.

В.И. Кан развил вариационный метод исследования экстремальных задач на семействах полиномов Фабера, соответствующих произвольным и звездообразным континуумам. Им дана оценка нескольких функционалов, зависящих от коэффициентов полиномов Фабера, а также от значений этих полиномов в фиксированной точке. В.И. Кан рассматривал также функционалы со значениями в матричных пространствах.

В.Г. Кочегурова совместно с И.А. Александровым работала над оценками коэффициентов однолистных функций. В.Я. Гутлянский изучал общие вариационные задачи на классе почти выпуклых мероморфных функций.

В работах И.А. Александрова и В.Я. Гутлянского рассмотрены классы функций, имеющих интегральные представления в форме интегралов Стильтьеса. На таких классах функций ставится задача экстрематизации функционалов со значениями в заданных метрических пространствах и развиваются вариационные методы для нахождения граничных функций относительно таких функционалов. Отсюда получаются, как частные случаи, многие ранее известные выводы.

Результаты, изложенные в вышеуказанной работе [150] И.А. Александрова, послужили также основой для оценки взаимного роста модуля однолистной функции и модуля её производной, усилившей соответствующие результаты Г.М. Голузина, Дж. Дженкинса и других. Эти оценки был получены И.А. Александровым и С.А. Копаневым.

Выполнив научные исследования по указанной тематике, подготовили и защитили, начиная с 1965 г., кандидатские диссертации ученики И.А. Александрова: В.И. Попов, В.Я. Гутлянский, С.А. Копанев, А.С. Сорокин, М.Н. Никульшина, А.Е. Прохорова, В.П. Мандик, Б.Г. Цветков, В.В. Баранова, Г.А. Попова, В.М. Александров, В.А. Андреев, В.М. Кесельман, Г.Д. Садритдинова, В.И. Кан, Р.С. Поломошнова, А.И. Александров, Л.М. Бер, Т.В. Касаткина, Л.С. Копанева, В.А. Синев, А.Н. Сыркашев. И.А. Александров в 1964 г. возглавил кафедру математического анализа и в 1966–1969 гг. был деканом механико-математического факультета.

Изучение геометрических вопросов, связанных с отображением единичного круга с помощью последовательности аналитических функций, привело Георгия Дмитриевича Суворова (1919–1984), начинавшего свои исследования под руководством П.П. Куфарева, к развернутой теории простых концов последовательности областей, сходящихся к ядру (кандидатская диссертация, 1951 г.). В этой же работе рассматривается регулярно сходящаяся последовательность аналитических функций, осуществляющая конформное отображение единичного круга на однолистные области, причем устанавливается соответствие между простыми концами последовательности областей и граничными точками круга. Результаты дальнейших исследований Г.Д. Суворова составили его докторскую диссертацию «Основные свойства некоторых классов топологических отображений плоских областей с переменными границами» (1961). В этих исследованиях, исходящих из задания некоторого минимума дифференциальных свойств изучаемых плоских однолистных отображений односвязных областей, устанавливаются некоторые метрические и топологические свойства, общие для конформных, квазиконформных, гармонических и других отображений. Рассматриваемая проблема соответствия границ при топологическом отображении зависит от метрических свойств отображающих функций, что приводит к изучению искажения расстояний при топологических отображениях односвязных областей. С другой стороны, проблема соответствия границ зависит от топологических свойств семейств областей в целом.

В работах получила применение сферическая метрика, получающаяся проектированием на плоскость сферы Римана радиуса R, касающейся плоскости в начале координат. Изучение топологического отображения областей показывает, что классическое в теории аналитических функций понятие сходимости последовательности плоских областей к ядру сохраняет свое значение и для более широкого класса отображений с некоторыми уточнениями. Подробно развита теория простых концов последовательности плоских областей, сходящихся к невырожденному ядру. Разработана классификация простых концов на топологической основе. Построенная теория простых концов при изучении отображений областей с переменными границами аналогична теории Каратеодори при изучении отображения двух фиксированных областей друг на друга. Развитая теория позволяет решать вопросы сходимости последовательности отображений. Итоги этих исследований изложены в монографии Г.Д. Суворова «Семейства плоских топологических отображений» (1965) [251].

В дальнейших исследованиях Г.Д. Суворова и его учеников развивается теория плоских и пространственных отображений весьма общих классов, включающих конформные, квазиконформные, гармонические и другие отображения. Для плоских отображений решены вопросы соответствия границ, получены двусторонние оценки искажения особым образом вводимых «относительных» расстояний. Поскольку рассматриваются замкнутые по таким расстояниям области, то эти оценки позволяют развить метод изучения основных метрико-геометрических свойств отображений замкнутых областей. Помимо основных свойств изучаемых классов отображений, таких как свойства равностепенной непрерывности и открытости, получены теоремы об искажении линий уровня, граничных дуг, площадей пограничных колец, теоремы типа покрытия. При этом даже для конформных отображений получаются новые результаты. Топологическая теория простых концов в соединении с результатами метрического характера позволила полностью исследовать вопрос о соответствии границ при топологическом отображении рассматриваемых классов областей с переменными границами. Используемый метод удалось распространить и на случай пространственных отображений. Это можно рассматривать как начало построения геометрической теории отображений, осуществляемых решениями линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных смешанного типа. Начато построение теории, аналогичной теории квазиконформных отображений, годной во всех трех случаях: эллиптическом, параболическом и гиперболическом.

Основные свойства топологических отображений плоских областей с переменными границами изложены в ряде статей и докладов Г.Д. Суворова, в частности в докладе «Топологические отображения плоских областей с переменными границами» на Международном математическом конгрессе в Стокгольме в 1962 г.

Г.Д. Суворов распространил неравенство, выражающее «принцип длины и площади», на случай неоднолистных Q-квазиконформных отображений. Это неравенство нашло применение в дальнейших исследованиях. В работе [252] Г.Д. Суворова устанавливаются геометрические условия, обеспечивающие равномерную сходимость последовательности плоских топологических отображений широкого класса в замкнутых областях. Вводится понятие непрерывной сходимости последовательности комплекснозначных функций, и при помощи теории простых концов последовательности плоских областей получается необходимое и достаточное условие такой сходимости. В работе ученика Г.Д. Суворова Б.П. Куфарева изучаются вопросы метризации пространства областей. Введенная метрика позволяет рассматривать сходимость последовательности областей к ядру как сходимость по метрике. Ему же удалось ввести метрику в замкнутой области так, что она оказывается конформно инвариантной. Г.Д. Суворов рассмотрел топологические отображения плоских областей множества простых концов меры нуль на границе области. Последние работы открывают возможность изучения граничных свойств аналитических функций в произвольных областях. Б.П. Куфарев [200] дал более простое доказательство основной леммы теории простых концов последовательности областей, сходящихся к ядру, используя понятие сечения последовательности областей. И.С. Овчинников [229] предложил удачный способ введения расстояний, позволяющий сразу присоединить к области всю границу и из полученных оценок получить ряд интересных фактов, связанных с вопросом о соответствии границ для плоских и пространственных отображений. Изучение топологических отображений на основе гиперболической метрики проводилось Г.Д. Суворовым и М.В. Баклановым (1941–1965) [157, 158]. Для одного класса топологических отображений уточненная теорема Линделёфа была доказана В.А. Трофименко. В совместной работе [255] Г.Д. Суворова и Г.А. Кузик начато изучение отображений, осуществляемых решениями простейших систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, например $u_x = v_y$, $u_y = v_x$ или $u_x = v_y$, $u_y = 0$.

Несколько в стороне от рассмотренной тематики были выполнены работы учеников Г.Д. Суворова, В.К. Ионина и С.Л. Крушкаля. В.К. Ионин решил задачу о круге, вложенном в многосвязную область, указав оценку радиуса круга. С.Л. Крушкаль дал более краткое доказательство формул для полной вариации и длины кривой для непрерывной функции с ограниченным изменением, используя стекловские средние. Им же доказаны две теоремы типа Фату для неаналитических функций.

В декабре 1965 г. профессор Г.Д. Суворов был избран членом-корреспондентом Украинской академии наук и в феврале 1966 г. выбыл из Томска на работу в Донецкий научный центр АН Украины.

В исследованиях по теории функций двух и нескольких комплексных переменных, относящихся к 1950–1960 гг., Е.Н. Аравийская изучала интегральное представление функций двух комплексных переменных, в частности многозначных. В работе Е.Н. Аравийской исследованы свойства областей, для которых имеют место интегральные представления функций двух комплексных переменных. В связи с задачей интегрального представления функций с заданными множествами особых точек были изучены возможности регулярного распространения некоторой окрестности куска аналитической поверхности, принадлежащего области регулярности, на эту область. Достаточные условия состояли в наложении некоторых условий на кривизну поверхности. В ряде работ Е.Н. Аравийская исследовала свойства функций с заданными нуль-поверхностями или с заданными особыми поверхностями. Получено представление, аналогичное ряду Лорана. Указана оценка роста аналитических функций с заданными нуль-поверхностями вблизи граничной точки ее области регулярности.

В ряде статей и кандидатской диссертации Л.Я. Макарова, применяя метод регулярного распространения, исследовала некоторые новые классы областей Рунге первого и второго рода в пространстве двух комплексных переменных, т.е. областей, в которых каждая регулярная в них функция равномерно аппроксимируется внутри области соответственно полиномами или рациональными функциями. Получена чисто геометрическая характеристика областей Рунге. М.И. Невидимова получила другой аналог ряда Лорана для аналитической функции двух комплексных переменных. Е.Н. Аравийская рассмотрела вопрос о вычете функций двух комплексных переменных. В совместной работе Е.Н. Аравийская и В.В. Исакова получили обобщение интегральной формулы Вейля на случай конечно-листной ограниченной области регулярности в пространстве многих комплексных переменных. В.В. Исакова получила также интегральное представление неограниченных функций при некоторых дополнительных условиях на рост функции и область. Это дало возможность построить простые и аппроксимирующие системы функций для некоторых многозначных функций.

Аналогичные вопросы для функций одного комплексного переменного изучал А.С. Сорокин, который доказал, что в конечной области на римановой поверхности с конечным числом точек ветвления регулярная функция аппроксимируется многочленами от рациональных степеней аргумента. Им же рассматривались вопросы построения областей полунепрерывного распространения на римановой поверхности.

§ 3

Исследования по дифференциальной геометрии в послевоенный период в Томске проводились доцентом Н.Г. Тугановым и его учениками.

Н.Г. Туганов изучил базисные линии поверхности, т.е. линии, вдоль которых асимптотические касательные одного семейства пересекают одну и ту же прямую, лежащую в неподвижной плоскости. Базисные линии инвариантны относительно проективных преобразований и интерпретируют проективную геометрию плоскости. Вводятся также аффинно-базисные линии и классы поверхностей со специальными свойствами афинно-базисных линий. Обобщение аффинно-базисных линий позволяет распространить исследование на некоторые конгруэнции прямых и дать характеристический признак поверхностей Фубини. Изучаются тройные системы поверхностей в аффинном и евклидовом пространствах.

В статье 1955 г. [268] Н.Г. Туганов начал исследование многообразий, элементами которых являются кривые второго порядка. Специально им были изучены конгруэнции индикатрис Дюпена, конгруэнции индикатрис аффинно-дифференциальной геометрии и в проективно-дифференциальной геометрии, а также некоторые другие многообразия. Исследованиями Н.Г. Туганова начата общая проективная теория конгруэнции коник.

Под руководством Н.Г. Туганова проводил свои первые исследования Р.Н. Щербаков, окончивший Томский университет в 1940 г. и работавший в 1945–1957 гг. в Бурятском педагогическом институте. В кандидатской диссертации (1951) и последующих работах [291, 292] Р.Н. Щербаков провел построение репера линий на поверхности в аффинно-дифференциальной геометрии и канонического проективного репера линии на поверхности. Это дало способ изучения классов поверхностей с однопараметрическими семействами некоторых замечательных линий. Ряд интересных результатов был им получен при перенесении метода репеража подмногообразий на линейчатые поверхности и конгруэнции в аффинном и проективном пространствах. Рассматривая прямолинейную конгруэнцию в трехмерном пространстве как однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей, Р.Н. Щербаков исследовал преобразования Егорова [293]. Результаты этого исследования были доложены автором на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г. В 1957 г. Р.Н. Щербаков возглавил кафедру геометрии Томского государственного университета.

Со второй половины 50-х гг. в Томске развернулись интенсивные исследования геометрических образов трехмерного пространства дифференциально-геометрическими методами. В работе томских геометров заметно стремление изучать линейчатые многообразия (конгруэнции, комплексы, пары конгруэнции и т. д.) с точки зрения наличия в них подмногообразий определенного типа. Такой подход привел к созданию метода репеража подмногообразий. Применение полуканонического репера позволило основателю томского геометрического коллектива Н.Г. Туганову решить ряд интересных задач метрической теории линий на поверхности. Систематическую разработку метода репеража подмногообразий провел, главным образом, Р.Н. Щербаков

[295, 296]. Им были построены полуканонические реперы в метрической, аффинной и проективной теории конгруэнций и теории комплексов. Результаты его многолетних исследований изложены в ряде статей и докторской диссертации (1963).

Полуканонические реперы в конформной теории поверхностей рассмотрены В.С. Малаховским, также ближайшим учеником Н.Г. Туганова, в теории пар конгруэнций – Е.Т. Ивлевым, в эквиаффинной теории «пар М» (конгруэнция и секущая поверхность) – Н.М. Онищук. Применение метода дало возможность решить ряд конкретных задач теории поверхностей и конгруэнций: исследование преобразований Егорова, конгруэнций Н, проективные пары конгруэнций, построение аналогов поверхностей вращения. В этих исследованиях участвовали Р.Н. Щербаков, Е.Т. Ивлев, М.Б. Пергаменщиков, А.А. Лучинин, В.А. Петин и другие. Существенное расширение метода произошло при его использовании для изучения трех- и четырехпараметрических образов. Появляющееся здесь понятие неголономного подмногообразия, естественно, соединяет неголономную геометрию с классической.

Л.И. Магазинников получил ряд результатов в центроаффинной теории конгруэнций и комплексов. В.А. Романович изучил проективную теорию пар конгруэнций, все подмногообразия которых параболические. В.И. Машанов провел систематическое исследование конгруэнций неевклидовых пространств. Е.Т. Ивлев провел геометрическим методом построение канонического репера m-поверхности в проективном пространстве P_n (для любых m и n). Исследование бесконечно малых преобразований комплексов выполнил Н.М. Маськин. Томские геометры под общим руководством Р.Н. Щербакова начали проводить исследования по дифференциальной геометрии векторного поля. Развитие метрической и аффинной теории трехпараметрических линейчатых геометрических образов представляется весьма перспективным для приложений в гидродинамике.

В.П. Долговых [184] для построения метрической теории поля направлений использовал геометрию погруженных многообразий. Им проведено изучение геометрии общего векторного поля с полным исследованием триортогональных систем векторных полей. В.В. Слухаев [245, 247] построил эквиаффинную геометрию установившегося течения жидкости. В работе [246] В.В. Слухаев рассмотрел аффинно-симметричные векторные поля и классы аффинно-симметричных течений.

В.М. Финкельштейн [276] построил метрическую дифференциальную геометрию четырехпараметрического поля направлений, являющуюся геометрической моделью нестационарного течения жидкости. Первые результаты по аффинной теории четырехпараметрического поля направлений получены А.А. Лучининым [211].

В исследованиях томских геометров получает все большее развитие второе направление, имеющее целью построение дифференциальной геометрии многообразий алгебраических фигур в многомерных пространствах. Начало этому направлению положено работами Н.Г. Туганова по теории конгруэнции кривых второго порядка. В.С. Малаховский провел исследование аффинной и проективной теории конгруэнций и комплексов коник в трехмерном пространстве. Эти построения удалось распространить на проективные пространства любого числа измерений для многообразий невырождающихся алгебраических поверхностей четного порядка. Изложение полученных В.С. Малаховским результатов дано в ряде статей [212–214], докладов и его докторской диссертации (1964).

В работе [215] В.С. Малаховский изучает свойства многообразий алгебраических фигур и определяемые ими группы преобразований. В.Р. Рютин методом внешних форм нашел все нормальные конгруэнции центральных коник.

Из других исследований томских геометров отметим работы Л.М. Шепеленко о проективных изгибаниях семейств Р-плоскостей, изучение неголономных поверхностей В.В. Васениным, результаты В.А. Романовича об аналогах пар конгруэнций трехмерного пространства в многомерном проективном пространстве.

Р.Н. Щербаков и В.С. Малаховский написали учебник по аналитической геометрии для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов. Написанный на современном научном уровне, этот учебник представляет серьезный вклад в учебную литературу. Р.Н. Щербаков на основе своих лекций написал «Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии» [297], изданный в Томске в 1960 г. В курсе последовательно проводится основная идея метода подвижного репера. Книга получила признание со стороны специалистов и служит важным пособием для овладения методом молодыми математиками.

§ 4

Еще в 1938 г. в «Известиях» Научно-исследовательского института математики и механики была опубликована статья С.А. Чунихина «О разрешимых группах» [289]. С 1941 по 1953 г. в период работы С.А. Чунихина в Томском электромеханическом институте инженеров транспорта и Томском университете под его руководством группа молодых томских математиков начала проводить исследования по теории групп. В нескольких работах С.А. Чунихина, относящихся ко времени его пребывания в Томске, развивается теория так называемых специальных групп. Среди полученных результатов можно отметить новое необходимое и достаточное условие специальности конечной группы. В работе «О p-разложимых группах» [290] вводятся и изучаются разложимые группы, определяемые как группы с порядками, делящимися на p, p-подгруппы которых служат для них прямыми множителями. Показано, что для p-разложимости группы необходимо и достаточно существование ряда нормальных делителей, в некотором смысле аналогичного верхнему центральному ряду. В более поздней работе С.А. Чунихина «О Р-свойствах групп» дано развитие идей указанной выше работы.

В 1945 г. С.А. Чунихин дал обобщение понятия П-групп с постулатом K (произведение определяется сразу для n элементов) на неассоциативные группы. Исследования С.А. Чунихина о силовских свойствах конечных групп внесли заметное оживление в развитие этого раздела теории групп со второй половины 40-х гг. С.А. Чунихин определил целый ряд Р-свойств конечных групп: П-силовские делители группы, П-разрешимость, П-отделимость, П-силовская правильность групп. Например, пусть П – произвольное множество простых чисел; группа G называется П-разрешимой, если каждый индекс ее композиционного ряда либо не делится ни на одно из чисел множества П, либо равен какому-нибудь числу из П. С.А. Чунихин установил достаточное условие для П-силовской правильности группы, откуда следовало, что все П-отделимые и П-разрешимые группы П-силовски правильны. Рассматривая вместо нормальных рядов группы ряды более общего вида, С.А. Чунихину в работах 1949–1953 гг. удалось значительно усилить указанные результаты. С.А. Чунихину принадлежит введение условия П-2, более сильного, чем условие П-силовской правильности группы. Им же показано, что между классами П-разрешимых и П-отделимых групп занимает промежуточное положение определенный класс K_π-конечных групп. С.А. Чунихин рассматривал еще некоторые вопросы о подгруппах относительно разрешимых групп, о композиционной структуре и простоте групп. Им были также подробно изучены вопросы существования и сопряженности подгрупп в конечных группах.

Исследование введенных С.А. Чунихиным П-свойств конечных групп проводилось в Томске его учениками А.И. Копаневым и Б.В. Казачковым. В кандидатской диссертации А.И. Копанева (1911–1950) проведено исследование групп с П-разложимыми подгруппами. В работе устанавливаются структура и основные свойства группы рассматриваемого типа. Показано существование трех видов таких групп. Теория рассмотренного класса групп находит применение при исследовании структуры неспециальных групп, все собственные П-подгруппы которых уже специальны, и для установления признаков существования у конечных групп собственных подгрупп.

В исследованиях Б.В. Казачкова «О теоремах типа Силова», составивших его кандидатскую диссертацию (1951), доказано, что свойство разрешимости и сопряженности всех П-силовских подгрупп выполняется в конечной группе, если оно выполнено в фактор-группе по какому-либо ее П-разрешимому нормальному делителю. Доказано также, что если во всякой конечной подгруппе локально конечной группы G сопряжены все силовские П-подгруппы, то для группы G выполняется свойство S: либо в G нет ни одного конечного класса сопряженных силовых П-подгрупп, либо все силовские П-подгруппы сопряжены в G. Б.В. Казачковым рассмотрены теоремы типа Силова для бесконечных групп [189]. Им доказано, что в разрешимой группе Черникова сопряжены все силовские Р-подгруппы по любому фиксированному множеству Р простых чисел. В дальнейших работах доцента Б.В. Казачкова, работавшего в Томском педагогическом институте, изучались бесконечные группы, все подгруппы которых специальные. Здесь получены аналоги теоремы О.Ю. Шмидта для конечных групп и некоторые другие теоремы. В статье [191] Б.В. Казачков рассмотрел условия факторизуемости периодических групп. В более поздних работах он получает ряд локальных теорем и вводит обобщенные понятия факторизуемости для локально конечных и локально разрешимых групп.

П.И. Трофимов в работе [264] рассмотрел введенные им транзитивно-коммутативные группы, т.е. группы, у которых всякие два элемента, перестановочные с третьим, перестановочны между собой. В работе [265] П.И. Трофимов исследовал зависимость между числом всех классов неинвариантных подгрупп конечной группы и числом всех различных простых делителей порядка группы. Группы с одним и двумя классами неинвариантных подгрупп были ранее рассмотрены О.Ю. Шмидтом. П.И. Трофимов доказал существование групп с любым числом инвариантных подгрупп. Им же получено несколько критериев разрешимости групп. Специальному исследованию были подвергнуты нильпотентные группы с заданным числом неинвариантных подгрупп. В.И. Альбрехт рассматривал некоторые специальные группы с неинвариантными подгруппами.

В.А. Белоногов изучал условия, при которых группа определенного вида имеет максимальные подгруппы того или иного порядка. В частности, рассматривался вопрос о необходимых и достаточных условиях максимальности силовской подгруппы. Им же было продолжено изучение П-свойств групп и получены некоторые признаки непростоты группы.

И.Х. Беккер исследовал вопросы существования центроида произвольной абелевой группы, а также скалярные эндоморфизмы. Для абелевых групп И.Х. Беккером изучались условия, при которых абелева группа с автоморфизмом 2 является характеристической подгруппой своего голоморфа. По материалам указанных исследований В.А. Белоногов и И.Х. Беккер написали и защитили кандидатские диссертации.

В стороне от основных алгебраических теоретико-групповых исследований находится работа Н.Ф. Канунова, работавшего несколько лет в Томске после окончания аспирантуры в Ленинградском университете. Она посвящена условиям разрешимости одного неопределенного уравнения в полиномах над полем рациональных чисел. Рассмотренная задача представляет интерес в теории алгебр обобщенных кватернионов над функциональным полем. В Томске Н.Ф. Канунов начал изучать научное наследие профессора Ф.Э. Молина.

§ 5

В первой половине 50-х гг. в Томске А.И. Фет и его ученики (С.И. Альбер, В.Н. Лагунов, В.А. Топоногов, Г.Г. Пестов) занимались вопросами вариационного исчисления в целом и некоторыми задачами топологии.

Развивая исследования Л.А. Люстерника по теории геодезических, А.И. Фет получил ряд интересных результатов. Им дано обобщение теоремы Люстерника–Шнирельмана о покрытиях сфер на случай произвольной инволюции n-мерной сферы. А.И. Фет и Л.А. Люстерник [271] доказали существование одной замкнутой геодезической на всяком замкнутом римановом многообразии. В «Ученых записках» Томского университета в 1952 г. опубликовано несколько заметок А.И. Фета по различным вопросам. В одной из этих заметок [273] дано обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке, причем при доказательстве использован метод пересечений Лефшеца. В другой заметке [274] в связи с теорией вариационных задач на замкнутых многообразиях изучаются фундаментальные группы пространства кривых с закрепленными концами и пространства неориентированных замкнутых кривых на n-мерной сфере. С.И. Альбер изучал гомологии различных многообразий (кольцо гомологий в пространстве окружностей, гомологии пространства плоскостей, однородных пространств, спинорной группы) и их применение к задачам вариационного исчисления.

Г.Г. Пестов в 1954 г. для выпуклых замкнутых кривых доказал, что внутри каждой дважды непрерывно дифференцируемой несамопересекающейся замкнутой плоской кривой, радиус кривизны которой в каждой точке не меньше R, можно поместить круг радиуса R. А.И. Фет поставил вопрос о возможности обобщения полученного результата на многомерный случай. Этой задачей занимались под руководством А.И. Фета В.К. Ионин, В.И. Дискант, В.Н. Лагунов.

В работах, вошедших в кандидатскую диссертацию, В.Н. Лагунов решил задачу о наибольшем шаре, вложенном в замкнутую поверхность. В статье [210], опубликованной в сборнике научных трудов Томского инженерно-строительного института, В.Н. Лагунов рассматривает пример бесконечно дифференцируемой функции, линии уровня которой в окрестности изолированного минимума незвездообразны.

З.И. Клементьев продолжал исследования по теории полуупорядоченных пространств и общей теории меры. Для произвольных K-пространств с единицей им был распространен критерий нормальности погружения А.Г. Пинскера. В других работах З.И. Клементьев изучал свойства вполне аддитивных функций с точки зрения теории полуупорядоченных пространств, рассматривал представление регулярных операций, переводящих непрерывные функции в полуупорядоченное пространство. Развивая результаты В.И. Соболева и Б.З. Вулиха, З.И. Клементьев построил общую теорию меры со значениями в булевой алгебре, рассмотрел возможность построения абстрактной теории меры на основе понятия нулевой меры, применил полученные результаты для определения длины кривой в абстрактном метрическом пространстве и понятия интеграла со значениями в полуупорядоченном *K*-пространстве. Некоторые приложения теории меры содержатся также в работах Н.Ф. Ждановой и А.А. Бокка, выполненных под руководством З.И. Клементьева. Н.Ф. Жданова использует теорию полуупорядоченных пространств для изучения свойств обобщенных мер на некотором измеримом пространстве, в частности, рассматривается пространство обобщенных мер ограниченной *p*-вариации.

З.И. Клементьев и А.А. Бокк дали доказательство теоремы о представлении счетно-аддитивной функции множества, заданной на классе борелевых множеств евклидова *n*-мерного пространства со значениями в банаховом пространстве, в виде интеграла Бохнера. В другой совместной работе они получили обобщение теоремы Радона–Никодима об интегральном представлении функций. Ими же рассматривался вопрос об обобщении понятия производной Соболева на основе теории меры для функций, заданных в абстрактных пространствах с мерой, и было дано соответствующее обобщение одного пространства Соболева с доказательством полноты. З.И. Клементьев получил обобщение некоторых теорем об интегральных операторах, встречающихся в теоремах вложения Соболева, для функциональных пространств функций абстрактного аргумента. Рассматривая полуупорядоченные пространства вместо пространств последовательностей, З.И. Клементьев получил обобщение ряда теорем Кете–Теплица. Он же подробно рассмотрел вопрос об аналитическом представлении линейных операций в пространствах функций, заданных в абстрактном измеримом пространстве. По этой теме З.И. Клементьев сделал сообщение на IV Всесоюзном математическом съезде. В совместной работе З.И. Клементьева и Р.М. Малаховской изучено представление функций сингулярными интегралами в более общем виде, чем у А. Лебега, П.И. Романовского и Д.К. Фаддеева. В частности, ими рассмотрены сингулярные интегралы от функций многих переменных, когда сингулярность сосредоточена на поверхности.

В ряде опубликованных работ и кандидатской диссертации Р.М. Малаховская рассматривает задачу обоснования операционного исчисления на основе теории обобщенных функций. Операторы Микусинского трактуются как обобщенные функции, этим достигается большая конкретность и общность.

Достаточно подробно развита и другая возможность включения операционного исчисления в теорию обобщенных функций на основе одностороннего преобразования Лапласа. Развитая трактовка операционного исчисления применяется для решения различных задач для дифференциальных уравнений обыкновенных и в частных производных. Уравнения в частных производных рассматриваются до третьего порядка. В работах этого цикла рассмотрен вопрос о соотношении между полем операторов Микусинского и построенным кольцом обобщенных функций, а также получены некоторые формулы реализации операторов, полезные при решении некоторых линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Некоторые вопросы геометрии метрического пространства изучал Л.Е. Портнов. Введенное понятие δ-характеристики непрерывного отображения замкнутого отрезка в метрическое пространство позволяет получить нормальную параметризацию непрерывной кривой метрического пространства и изучить вопрос о ее длине, дать классификацию непрерывных кривых и получить для них ряд характеристик, не зависящих от сдвига и преобразования, меняющего ориентацию координатной системы. Отдельные вопросы спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка, относящиеся к проблеме единственности спектрального разложения, рассмотрены в нескольких статьях Н.Н. Круликовского.

По математической физике проводил исследования доцент Г.А. Бюлер. Он решил несколько конкретных задач теории электрического и магнитного поля, а также теплопроводности. В решении некоторых задач из этих областей принимали участие и другие томские математики (В.В. Сивкова, М.А. Тынкевич и др.). Осесимметрическую задачу дифракции Г.А. Бюлер решал с помощью интегрального уравнения. Для решения задач электротехники и дефектоскопии значительный интерес представляет изучение электрического и магнитного полей при помещении в них проводника. Рассмотрены задачи для тел различной конфигурации, помещенных в то или иное поле. Г.А. Бюлер рассмотрел следующие задачи: обтекание диэлектрика постоянным током, многослойное цилиндрическое тело в продольном переменном поле, напряженность магнитного поля в цилиндре с разрезом, призматический стержень прямоугольного сечения в продольном переменном поле, распределение плотности индукционных токов на поверхности металла, обтекание постоянным током призматической пластины с поперечным дефектом, цилиндр полукруглого сечения в продольном переменном поле (совместно с В.Я. Михиным), цилиндрический проводник произвольного сечения в плоском периодическом поле, вектор-потенциал пластинки в переменном поле системы линейных токов (совместно с В.В. Сивковой), цилиндр секторного сечения в продольном переменном однородном магнитном поле, нелинейная задача ферромагнетизма, двуслойный шар в апериодическом магнитном поле (совместно с Г.И. Сивцовой), многослойный цилиндр в нелинейном продольном поле. В.В. Сивкова рассмотрела цилиндр в переменном поле соленоида и обтекание цилиндра постоянным током в пространстве, состоящем из двух проводящих сред. Для решения перечисленных задач применяются методы операционного исчисления или последовательных приближений. В ряде случаев задачи приводятся к интегро-дифференциальным уравнениям. Вычисление величины потенциала, полученного в интегральном виде, производилось методами численного интегрирования.

В работах 60-х гг. Г.А. Бюлер занимался задачами теплопроводности. Для решения нелинейных уравнений теплопроводности применяется метод малого параметра. В совместной работе Г.А. Бюлер и Т.А. Фионова, рассматривая решение одномерных краевых задач теплопроводности при теплоемкости и теплопроводности, зависящими от температуры, дали анализ различных квазилинейных разностных схем и доказали устойчивость метода прогонки. Г.А. Бюлер рассмотрел разностные схемы для решения третьей краевой задачи теплопроводности в случае слоистой пластинки, трубки и шарового слоя. Для вычисления напряжений в двуслойной трубке рассматривается задача численного решения уравнения термоупругости для бесконечной трубки. Вычисление температуры в двухслойной конечной трубке было проведено в работе Г.А. Бюлера и М.А. Тынкевича.

Томские ученые занимались отдельными вопросами вычислительной математики. В 1945 г. В.С. Нуварьев опубликовал работу об обосновании способа наименьших квадратов. В исчислении конечных разностей Н.К. Витвицкий дал обобщение теоремы Коши. Способ наименьших квадратов и статистические методы были успешно применены

В.Г. Фастом для построения некоторых эмпирических функций двух переменных и при обработке данных различных наблюдений, связанных с созданием теории взрыва Тунгусского метеорита.

М.Р. Куваев указал на применение теории вычетов для вычисления определенных интегралов от рациональных выражений, содержащих тригонометрические функции.

В послевоенный период в Томске выполнен ряд работ по вопросам методики преподавания математики в высшей и средней школе. Составлен ряд учебных пособий по курсам высшей математики для различных специальностей и специальным математическим курсам (М.Р. Куваев, М.Д. Ходор, В.И. Альбрехт, М.А. Тынкевич и другие), изданных ротапринтным способом.

Вопросам обучения студентов-математиков в университете с точки зрения стимулирования научного творчества посвящена статья [256] Г.Д. Суворова, опубликованная в сборнике Ленинградского университета. В работах Н.А. Троицкой дан анализ типичных ошибок студентов при изучении курса высшей математики и сформулированы требования к математической подготовке выпускников средних школ.

Значительное число статей томских ученых по различным вопросам методики преподавания математики в средних школах опубликовано в методическом журнале «Математика в школе», различных сборниках, «Ученых записках» Томского педагогического института, изданиях Томского университета и т.д. Среди авторов указанных статей: А.Е. Попко, Н.А. Троицкая, В.С. Федорова, Л.Ф. Пичурин, А.В. Деттерер, Н.П. Тучнин, Н.Н. Круликовский, З.О. Шварцман, Л.А. Стуканов, И.Х. Беккер и другие.

Л.Ф. Пичурин ряд статей и кандидатскую диссертацию посвятил вопросам преподавания вычислительной математики в средней школе. З.О. Шварцман занимался вопросами методики внеклассной работы по математике в школе. Л.А. Стуканов разработал ряд конструкций нового типа наглядных пособий по геометрии и методику их применения на уроках математики. В статье старейшего методиста преподавания математики А.Е. Попко (1889–1965) и в работах доцента Н.П. Тучнина, работавшего несколько лет в Томске, разрабатывались вопросы преемственности обучения математике в начальной и средней школе. А.В. Деттерер занимался вопросами методики решения геометрических задач в средней школе.

§ 6

В рассматриваемый период на ММФ изменилась тематика исследований по механике.

Евгений Дмитриевич Томилов (1901–1996) статьей с замечаниями о приближенном интегрировании уравнений плоского сверхзвукового движения газа в 1948 г. положил начало циклу работ по гидромеханике и газодинамике. В совместной с А.Ю. Лиссом работе получено второе приближение для решения задачи об обтекании конуса сверхзвуковым потоком газа.

В следующих работах указан метод исследования винтового движения идеальной несжимаемой жидкости, основанный на введении функции тока и функции типа двумерного потенциала скорости, позволивший доказать существование ряда таких движений. Для установления одного вида точных частных решений уравнений плоского безвихревого движения газа составлена таблица функций. В статье «Об одном виде плоского безвихревого движения газа» Е.Д. Томилов показал, что дифференциальное уравнение Чаплыгина, которому в плоскости годографа скорости удовлетворяет функция тока плоского безвихревого течения газа, имеет точное решение в виде конечного полинома любой степени относительно угла наклона скорости, при этом члены с четными и нечетными степенями этих полиномов могут рассматриваться как самостоятельные решения уравнения. В этой работе Е.Д. Томилову было известно только единственное точное решение уравнения Чаплыгина, полученное в 1902 г. для струйных движений газа.

Е.Д. Томиловым были составлены и изданы курсы лекций «Аэромеханика больших скоростей» (Томск, 1963), «Руководство по специальности “механика” и “теоретическая механика” для механико-математического факультета университета» (Томск, 1966. Ч. 1; 1970. Ч. 2).

С 1940 по 1961 г. Е.Д. Томилов руководил кафедрой теоретической механики в университете. Среди выпускников кафедры этого периода – Г.И. Назаров, Ю.С. Завьялов, И.А. Александров, Б.Г. Кузнецов, Л.В. Комаровский, В.Е. Томилов, В.И. Садчиков, В.П. Харитонов.

В последующие годы Е.Д. Томилов продолжил исследования по гидромеханике и газодинамике, были опубликованы статьи о методе инвариантных преобразований уравнений, о методе годографа. Е.Д. Томилову принадлежит несколько статей о развитии теоретической механики в

Томском университете. С 1968 по 1984 г. он работал во вновь организованном НИИПММ, где занимался изучением струйных движений невязкого газа. В его монографии «Струйные дозвуковые плоские движения газа. Основные методы и задачи», которая вышла в издательстве «Наука» в 1980 г., наряду с обзором существующих теорий, в частности методов Чаплыгина и Сретенского, приведены результаты исследования автора. В более поздних статьях рассматриваются конкретные задачи струйных движений несжимаемой жидкости.

Георгий Иванович Назаров окончил университет в 1940 г. и начал работать на кафедре теоретической механики, но вскоре был призван в армию и вернулся в 1947 г. В первых научных публикациях Г.И. Назаров рассмотрел некоторые задачи автомодельного неустановившегося движения газа методом размерности, затем, используя известный приближенный метод Томотика–Тамада, провел исследования дозвуковых и околозвуковых движений газа около заостренных профилей. В дальнейшем Г.И. Назаров обратился к применению метода Бергмана к плоским и осесимметричным задачам движения несжимаемой и сжимаемой жидкости, а также к задачам магнитной гидродинамики. В первых статьях этой тематики даны два точных общих решения для функции тока установившегося потенциального движения несжимаемой жидкости на основе рядов Бергмана. В последующих его работах дается изложение и развитие метода Бергмана для его широкого внедрения при решении конкретных задач газовой динамики и магнитной гидродинамики при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. Содержание этих работ стало основой докторской диссертации Г.И. Назарова, которая была им защищена на тему «Применение метода Бергмана в газовой динамике и магнитной гидродинамике» в 1963 г. Для решения уравнения функции тока плоского установившегося потенциального движения газа Г.И. Назаров с помощью введения некоторой произвольной функции производит преобразования этого уравнения в уравнения других видов, позволяющие применять аппроксимирующие функции, приводящие к упрощению уравнений. Этим методом было построено решение задачи обтекания непрерывной цепочки профилей. В статье 1964 г. «Функции Бергмана в теории течений сжимаемой жидкости» Г.И. Назаровым получены рекуррентные формулы при любом показателе адиабаты и установлена связь между этими функциями для дозвукового и сверхзвукового течения газа. В 1964 г. Г.И. Назаров стал профессором, а в 1961–1967 гг. заведовал кафедрой теоретической механики. В течение 10 лет (1955–1965) он был деканом механико-математического факультета. В 1967 г. Г.И. Назаров уехал из Томска и стал заведующим кафедрой теоретической механики Киевского института инженеров гражданской авиации.

Юрий Семенович Завьялов, окончивший Томский университет в 1953 г. и аспирантуру в 1956 г., защитил кандидатскую диссертацию «Об интегрировании некоторых уравнений неизэнтропического движения газа». Дальнейшие его работы относятся к теории плоских вихревых установившихся движений газа. В работе 1957 г. установлены условия, при которых уравнения вихревого движения газа сводятся к уравнениям безвихревого потока. В статье «К вопросу об интегрировании уравнений плоского вихревого движения газа» строятся примеры безвихревых движений. Впоследствии результаты этих работ используются для приближенного интегрирования уравнений плоского сверхзвукового вихревого адиабатического движения газа с функцией энтропии, мало отличающейся от постоянной. В 1961–1962 гг. Ю.С. Завьялов заведовал кафедрой вычислительной математики, а в 1963 г. переехал в Новосибирск. Ю.С. Завьялов внес крупный вклад в развитие теории сплайнов, в 1972 г. защитил докторскую диссертацию по этой тематике. В Институте математики Сибирского отделения Академии наук занимал должность заместителя директора. Он не порывал связи с Томском, приезжал на научные конференции и читал лекции для студентов и преподавателей ММФ.

Б.Г. Кузнецов в своих первых работах 1957–1959 гг. дал формулировку второго вариационного принципа Бэйтмана при произвольном уравнении состояния для движения газа в пространстве любого числа измерений для области произвольного вида. В кандидатской диссертации «Обобщенные виртуальные перемещения» (1959), пользуясь введенным им понятием, приводится уравнение движения систем с любыми связями и произвольным законом взаимодействия с ними. В диссертации и последующих работах устанавливается, что вариационный принцип Гамильтона–Остроградского при введенном определении виртуальных перемещений оказывается справедливым для любых неголономных систем, а также для движений невязкого газа. Б.Г. Кузнецов занимался построением общей теории канонических преобразований уравнений в частных производных. В работе, совместной с Ю.С. Завьяловым, показано применение этой теории к уравнениям движения сплошной среды. Дальнейшая деятельность Б.Г. Кузнецова связана с Институтом теоретической и прикладной механики СО АН СССР в Новосибирске.

Л.В. Комаровский, окончивший университет в 1955 г., в начале 1962 г. защитил кандидатскую диссертацию «О пространственных течениях газа с вырожденным годографом», в которой дан анализ пространственного движения газа для случая, когда пространство обобщенного годографа вырождается в двумерную поверхность. В следующих его работах дано точное аналитическое решение для течения газа типа двойной волны, содержащее три произвольных функции одного аргумента. На основе частного аналитического решения указывается пример вихревого течения, в котором произвольные функции выбраны из начальных и граничных условий рассмотренной задачи. В работах, выполненных совместно с Б.Г. Кузнецовым, дано приближенное аналитическое решение задачи о сверхзвуковом обтекании тупоносого тела с отошедшей ударной волной для плоского и осесимметричного случая. В цикле работ Л.В. Комаровского при участии М.С. Горохова рассмотрена обобщенная задача Лагранжа о движении поршня в трубе. В работах В.Е. Томилова изучается вращение тяжелого твердого тела переменной массы вокруг неподвижной точки в сопротивляющейся среде, когда момент сил сопротивления пропорционален вектору кинетического момента тела, а абсолютные скорости отделяющихся частиц равны нулю. В дальнейшем В.Е. Томилов дает общую постановку задачи о вращении тяжелого твердого тела переменной массы вокруг неподвижной точки, а также получает закон изменения массы тела, при котором удается проинтегрировать систему дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи. Все эти работы составили содержание кандидатской диссертации В.Е. Томилова, защищенной в 1963 г.

С 1953 г. на кафедре теоретической механики начала работать Вероника Александровна Гриднева, прибывшая из аспирантуры Московского университета. Первой ее опубликованной работой была статья «Определение сопротивления тел, помещенных в поток завихренной жидкости» (1961), в которой дается решение плоской задачи о лобовом сопротивлении тела, помещенного в канал с прямыми стенками и обтекаемого завихренным потоком идеальной жидкости, с учетом устойчивой вихревой дорожки, образующейся телом. В 1967 г. В.А. Гриднева защитила кандидатскую диссертацию по другой тематике.

Тематику исследований В.А. Гридневой составили вопросы физики процессов высокоскоростного соударения тел. В этом направлении работали сотрудники НИИПММ и нескольких кафедр университета.

Полученные для конкретных задач системы дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями решались аналитическими и вычислительными методами. Круг рассмотренных задач включал вопросы техники, экологии, технологии, сейсмологии. С 1985 г. В.А. Гриднева – профессор кафедры физической и вычислительной механики ММФ.

В послевоенные годы на кафедре астрономии А.М. Лейкин установил тесную связь с Институтом теоретической астрономии в Ленинграде. На кафедре развернулась работа по вычислению орбит малых планет. Вычисленные элементы орбит и эфемериды планет публиковались в сборниках института. В этой работе принимали участие А.М. Лейкин, А.А. Сивков, О.Н. Чайко, З.А. Флоринская, В.И. Анжина, Г.И. Косовичёв. В области практической астрономии доцентом Г.С. Тютеревым были переопределены координаты астрономической обсерватории университета. Он же исследовал влияние метеорологических факторов на астрономические определения широты и времени.

В 1957 г. после запуска первого искусственного спутника Земли была создана сеть станций наблюдения за ними. При Томском университете такая станция в течение 10 лет проводила наблюдения за различными искусственными космическими объектами визуальными и фотографическими методами. Руководство наблюдениями осуществляли Б.Т. Харин и Н.А. Гольцева. Начиная с 1962 г., активно развивались исследования по метеорной статистике. Эта тематика разрабатывалась Р.Г. Лазаревым. Им установлено существование асимметрии движения Земли в распределении видимых радиантов в плоскости эклиптики. В дальнейшем исследования по астрономии проводились в НИИПММ.

В 1977 г. в НИИПММ был организован отдел небесной механики и астрономии. Руководителем отдела была Т.В. Бордовицына. Первые результаты были опубликованы в монографии Т.В. Бордовицыной и Л.Е. Быковой «Теория движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979–2000 гг.» и книге Т.В. Бордовицыной «Современные численные методы в задачах небесной механики». За годы существования кафедры астрономии и геодезии на факультете подготовлено большое число специалистов, среди которых известные ученые А.А. Немиро, А.А. Нефедьев, Д.А. Рожковский, В.Ф. Проскурин, Р.Е. Гершберг и другие.

4. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

§ 1

В течение первой половины XX в. Томск был основным центром математических исследований и высшего математического образования в Сибири. Значительную часть математиков, работавших в высших учебных заведениях других городов Сибири, составляли воспитанники томских высших учебных заведений, прежде всего Томского государственного университета.

К концу 60-х – началу 70-х гг. можно говорить о сложившихся в Томском университете математических школах теории функций комплексного переменного и дифференциальной геометрии. Научные исследования на механико-математическом факультете велись и по другим направлениям. В области теории функций комплексного переменного изучались экстремальные задачи теории однолистных функций, вопросы квазиконформных и других обобщенных отображений, а также теории функций многих комплексных переменных. В школе дифференциальной геометрии можно отметить несколько направлений: исследование геометрических образов трехмерного пространства дифференциально-геометрическими методами; построение дифференциальной геометрии многомерных алгебраических фигур в многомерных пространствах; дифференциальная теория векторных полей с приложением в гидромеханике.

Значительно расширились алгебраические исследования по теории абелевых групп и другим вопросам современной алгебры.

Исследования по функциональному анализу относились к области теории меры со значениями в полуупорядоченных пространствах, вопросам геометрии банаховых пространств, теории функций в топологических пространствах, некоторым вопросам спектральной теории дифференциальных операторов и ее истории.

Продолжались исследования по теории вероятностей и математической статистике с их приложениями.

Развивались некоторые аналитические и численные методы решения задач математической физики.

Изучались вопросы преподавания математики в средней школе и университете, в частности подготовки учителей математики.

Научные исследования по теоретической механике продолжались в области гидроаэромеханики. После закрытия на механико-математическом факультете специальности и кафедры астрономии некоторое время на нем оставалась специализация по небесной механике. Позднее подготовка специалистов по астрономии возобновилась на физическом факультете. В 1977 г. на механико-математическом факультете была создана кафедра физической механики с новой специализацией по аэротермохимии.

Важным событием для развития науки в Сибири, в том числе и математических наук, стало создание в 1957 г. Сибирского отделения Академии наук СССР с Институтом математики и Вычислительным центром в Новосибирске. Сотрудниками различных институтов Сибирского отделения Академии наук СССР стали томские математики и механики, среди них Ю.С. Завьялов, В.А. Топоногов, В.Г. Пряжинская, Б.Г. Кузнецов, В.К. Ионин, С.Л. Крушкаль, В.Н. Шепеленко.

В Томском университете в 1957 г. создается кафедра прикладной и вычислительной математики, в 1970 г. открывается новый факультет прикладной математики, в основном на базе радиофизического факультета.

В 1968 г. при Томском университете возрождается Институт прикладной математики и механики (НИИПММ). В 1941 г. существовавший с 1932 г. при ТГУ Институт математики и механики (НИИММ) был преобразован в отдел Сибирского физико-технического института. Подготовка специалистов соответствующего профиля проходила на спецотделении физического факультета, а с 1962 г. – на физико-техническом факультете. Научные исследования в НИИПММ и на физико-техническом факультете в основном относились к проблемам прикладного и технического характера. Научные контакты НИИПММ и механико-математического факультета осуществлялись в различной форме.

Обзор деятельности НИИПММ за 25 лет (1968–1993) и некоторые материалы из истории института были опубликованы в книге, вышедшей в 1993 г. [95].

Создано и работает томское отделение Сибирского математического общества.

В 1960–1970 гг. на территории Сибири открываются университеты в Новосибирске, Тюмени, Красноярске, Омске, Кемерове, а позднее и в других городах. Возникновение новых научных математических центров создало новые возможности для расширения и развития математических исследований. Значительно возросло число проводимых в Сибири научных конференций, постоянными и активными участниками которых были сотрудники механико-математического факультета. Неоднократно состоялись научные конференции по математике и механике Западно-Сибирского региона. Чаще стали проводиться научные конференции по отдельным направлениям математики (теория функций, алгебра, функциональный анализ, геометрия). Работы томских математиков широко публиковались в центральных, сибирских и местных изданиях. Издания Томского университета выходили в виде тематических сборников: «Вопросы геометрической теории функций», «Геометрический сборник», «Исследования по анализу и алгебре», «Абелевы группы и модули» и др. Появились новые формы организации научной работы. Были созданы научно-исследовательские лаборатории при кафедрах математического анализа, алгебры и теории функций. Установились контакты научного сотрудничества с институтами СО РАН в Новосибирске и Томске (Институтом математики, Институтом теоретической и прикладной механики, Институтом оптики атмосферы). И.А. Александров вошел в состав редколлегии «Сибирского математического журнала» и в диссертационный совет Института математики СО РАН.

Научные работы по математике и механике поддерживаются грантами Российского фонда фундаментальных исследований, а также участием в федеральных целевых программах. Премиями университета за научные работы по математике отмечены профессора П.А. Крылов и В.В. Черников.

К концу прошедшего столетия расширяются международные научные связи ММФ. Кафедра физической и вычислительной механики (профессор А.М. Гришин) установила контакты с научными учреждениями США, Франции, Португалии. Кафедра теоретической механики (профессор А.М. Бубенчиков) заключила договор научного сотрудничества с лабораторией биомеханики в Париже. Профессор университета Париж-12 К. Аду, побывавший в Томске в 2001 г., прочитал лекцию для студентов и преподавателей ММФ по проблемам математического моделирования биологических тканей.

По исследованиям в области теории вероятностей поддерживается связь с Дрезденским техническим университетом. В 2002 г. профессор математики Второго Римского университета М. Пикарделло выступил на факультете с докладом по вопросам гармонического анализа. По приглашению кафедры алгебры профессор К. Карпфингер из технического университета Мюнхена в 2002 г. прочитал два спецкурса для студентов старших курсов и выступал с докладами на научных семинарах кафедр алгебры и геометрии. На конференции в Томске он выступил с докладом «О конструкции упорядоченных почти тел и группе порядковых автоморфизмов трансцендентного расширения полей».

С зарубежными гостями на ММФ состоялись интересные беседы и обмен опытом по вопросам преподавания математики.

Профессор С.П. Гулько входит в состав редколлегии болгарского математического журнала «Сердика». Профессора И.А. Александров, Г.Г. Пестов, С.Я. Гриншпон являются членами Американского математического общества и сотрудничают в международных реферативных журналах.

Чаще стали появляться публикации научных статей томских математиков в зарубежных изданиях (Германия, Румыния, США, Франция, Греция, Болгария, Чехия). Значительно расширилось участие сотрудников факультета в работе международных и региональных конференций, семинаров и т.д. как внутри страны, так и за рубежом. Томские математики были участниками международных математических конгрессов в Стокгольме, Москве, Финляндии; Международного конгресса по истории науки в Москве; Европейской конференции по математическому образованию в Германии; топологического симпозиума и математической конференции в Праге; симпозиума по прогнозу погоды в Италии; съезда болгарских математиков; конференций во Франции, США, Греции; различных конференций по математике международного уровня в Москве, Новосибирске, Томске.

Научно-исследовательская работа студентов проходит на кафедрах. Студенты участвуют в работе научных семинаров, ежегодно проводятся студенческие научные конференции. Студенты выступали с докладами на студенческих научных конференциях в университетах Новосибирска, Красноярска, Москвы. Студенческие научные работы неоднократно отмечались премиями и дипломами на конкурсах и смотрах.

Бывшие сотрудники факультета успешно работают по специальности в США (Л. Шахтмейстер, Т. Флешер), Канаде (В. Агранат, А. Гофман, В. Пестов), Израиле (С. Пейгин, А. Лейдерман, И. Печников).

§ 2

В конце 1960-х гг. произошли значительные изменения в составе томских математиков, занимающихся теорией функций комплексного переменного. В 1966 г. профессор Г.Д. Суворов и ряд его учеников уехали из Томска. В 1968 г. не стало профессора П.П. Куфарева. В 1969 г. профессор И.А. Александров переехал в Донецк, а затем до 1982 г. был ректором Тюменского университета. Связи Г.Д. Суворова и И.А. Александрова с томскими математиками сохранялись.

В изменившихся условиях исследования по теории функций комплексного переменного продолжались. Научный семинар имени П.П. Куфарева оставался организующим центром. Руководство семинаром принял В.В. Черников.

В.В. Черников (1930–1997) окончил университет в 1954 г. и аспирантуру под руководством П.П. Куфарева. Кандидатскую диссертацию «Экстремальные задачи на некоторых классах аналитических функций с вещественными коэффициентами» защитил в 1962 г., а докторскую – «Геометрические свойства регулярных и мероморфных функций» – в 1991 г. в Институте математики СО РАН. Профессором кафедры общей математики стал в 1994 г.

Научные интересы В.В. Черникова состояли в изучении экстремальных свойств различных классов отображений. Предложенный им новый вариационный метод объединял метод внутренних вариаций и метод площадей. Несколько его работ посвящены геометрическим свойствам регулярных и мероморфных функций. Были решены новые задачи, связанные с обобщенной выпуклостью и спиральностью однолистных функций для определенного класса, и задача об изменении кривизны линий уровня для некоторых подклассов. Были введены и изучены новые функционалы для линий уровня и их ортогональных траекторий. В.В. Черниковым даны описание граничных функций некоторых систем функционалов на классе типично вещественных функций и решение проблемы коэффициентов в этом классе. Полное решение получено для задачи об уклонении линий уровня. Несколько работ по проблеме коэффициентов выполнены В.В. Черниковым совместно с его учеником П.И. Сижуком и с С.А. Копаневым.

Б.П. Куфарев (1940–2004) разработал новый способ изучения граничного поведения монотонных функций и пространственных отображений, основанный на осцилляционных неравенствах с потенциалами. На формирование научных интересов Б.П. Куфарева большое влияние оказал Г.Д. Суворов, его научный руководитель в студенческие и аспирантские годы. После отъезда Г.Д. Суворова руководство его семинаром перешло к Б.П. Куфареву. Область научных интересов Б.П. Куфарева можно характеризовать как метрико-топологические вопросы теории функций и асимптотических свойств функций и отображений, плоских и пространственных. Полученные результаты составили основную часть его докторской диссертации «Аналоги “принципа длины и площади” и некоторые граничные свойства отображений», защищенной в 1991 г. в Институте математики Сибирского отделения Академии наук. С 1992 г. Б.П. Куфарев – профессор кафедры математического анализа, оставаясь до 1996 г. сотрудником НИИПММ. Начиная с докторской диссертации, объектом исследования Б.П. Куфарева стали потенциалы безвихревых векторных полей, дифференцируемые функции многих переменных, отображения с конечными потенциалами «энергии» или интегралами типа Дирихле. Были предложены единое направление и подход к изучению метрических свойств и асимптотического поведения отображений и метод, основанный на новых осцилляционных неравенствах с потенциалами.

Тематика работ учеников Б.П. Куфарева и участников семинара близка к этому направлению. Назовем некоторые их них.

Н.Г. Никулина рассмотрела связи меры Лебега подмножества с вариацией функции расстояния до замкнутого множества, задачу об оценке отклонения изучаемого отображения от конформного и другие вопросы. Ю.А. Пешкичев изучал продолжения функций до квазиконформного гомеоморфизма, многомерный градиент, уровни экстремальной функции. В.М. Зюзьков занимался соответствием граней при отображениях Ройхна, бикомпактными расширениями Ройхна в связи с предельными множествами непрерывных отображений некоторого класса. Б.В. Соколов участвовал в исследованиях о соответствии границ, *K*-предельных решений квазилинейных эллиптических уравнений и характеристических свойств отображений с ограниченным потенциалом градиента. А.П. Кармазин изучал граничные поведения и метрические свойства отображений, в частности в квазиизомерном пространстве. А.Н. Малютина рассмотрела метод модулей отображений с ограниченным в среднем искажением, включающим квазирегулярное отображение, теоремы о дефектах и других свойствах таких отображений, об эквивалентности геометрического и аналитического определения для отображений с усредненной характеристикой, о продолжении отображений с *S*-характеристикой. Некоторые работы выполнялись совместно и с участием руководителя семинара.

Профессор И.А. Александров возвратился в Томск в 1982 г. и был избран заведующим кафедрой математического анализа. За годы, проведенные вне Томска, им написаны статьи для энциклопедии «Математическая физика» и для «Математической энциклопедии»: «Вариационные принципы теории функций комплексного переменного», «Вариационно-параметрический метод», «Метод внутренней вариации» и другие. В 1976 г. издана монография И.А. Александрова «Параметрические продолжения в теории однолистных функций» (М.: Наука). В этих статьях и книге дано систематическое изложение результатов исследований раздела теории функций, значительная часть которых принадлежит томским математикам. Новые результаты были получены о конформных отображениях односвязных и многосвязных областей. Вопросы оптимального отображения в задачах о коэффициентах однолистных функций рассмотрены совместно с Г.Г. Завозиным и С.А. Копаневым. Было издано учебное пособие «Введение в геометрическую теорию функций» (1972).

После возвращения в Томск сделаны оценки коэффициентов ограниченных однолистных функций и функций с симметрией вращения и рассмотрены конформные отображения полуплоскости на область с симметрией переноса, изучались вопросы проблемы коэффициентов в связи с гипотезами Л. Бибербаха и И.М. Милина и их доказательством Л. де Бранжем, изучено использование обобщенных гипергеометрических функций в решении задачи о коэффициентах.

В монографии «Методы геометрической теории аналитических функций» И.А. Александрова, кроме необходимых известных сведений излагаемой теории, в значительной части содержатся результаты, полученные в основном автором, его учениками и коллегами: В.Я. Гутлянским, В.И. Поповым, С.А. Копаневым, В.В. Соболевым, А.С. Сорокиным, В.М. Кесельманом, А.И. Александровым, Г.Д. Садритдиновой, В.И. Каном и др. И.А. Александров и В.В. Баранова рассмотрели метод вариаций в теории однолистных функций с симметрией сдвига (1974) и указали его применение к исследованию экстремальных задач. Т.В. Касаткина доказала теорему о функциях с симметрией вращения, имеющую отношение к проблеме коэффициентов, и рассматривала логарифмические коэффициенты производной на классе голоморфных однолистных функций. Функционал Милина и полиномы Бранжа в совместной работе И.А. и А.И. Александровых и Т.В. Касаткиной рассматриваются в связи с задачей о коэффициентах голоморфных однолистных функций, понимаемой как экстремальная задача на решениях управляемой системы дифференциальных уравнений. Г.Д. Садритдинова изучала свойства решений уравнений Лёвнера с постоянным управлением как функций начального условия. Ею доказано, что эти решения являются экстремальными функциями для ряда вариационных задач на классах голоморфных однолистных функций в круге. В совместной с И.А. Александровым работе исследовались отображения с симметрией вращения. И.А. Александров принимал участие в рассмотрении некоторых вопросов прикладного характера. В работе с С.Я. Александровой указана возможность математического моделирования механизма окисления липидов. С В.В. Барановой и В.Г. Астафуровым написано учебное пособие «Дельта-функция, свертка, свойства, применение в радиотехнике». Совместно с В.А. Андреевым изучались экстремальные задачи для системы функций без общих значений (1987).

А.И. Александров исследовал конформное отображение полосы на области с симметрией переноса, получил формулу типа Кристоффеля–Шварца для областей с полигональной границей. Самостоятельные исследования А.И. Александрова были поддержаны И.А. Александровым в совместных публикациях статей «Экстремальные управляющие функции в уравнении Левнера в теореме вращения», «Об одном обобщении формулы Кристоффеля–Шварца», «О граничных функциях для простейших функционалов», «Точные оценки производных однолистных функций».

И.А. Александров и В.В. Соболев написали учебное пособие «Аналитические функции комплексного переменного», изданное в 1984 г. В 2002 г. издательством Томского университета опубликован новый оригинальный по содержанию и изложению учебник «Теория функций комплексного переменного» с рекомендацией Министерства образования РФ для студентов математических специальностей.

И.А. Александров проявил активное организационное и авторское участие в издании биобиблиографических брошюр о математиках Томского университета.

И.А. Александров является членом-корреспондентом Российской академии образования, членом ряда научных обществ, в том числе членом Американского математического общества, действительным членом Международной академии наук высшей школы, Почетным доктором Тюменского университета, заслуженным профессором Томского университета.

С.А. Копанев совместно с Л.С. Копаневой получили формулы типа Кристоффеля–Шварца для счетноугольника. Л.С. Копанева изучала параметрическое представление отображения с симметрией переноса и экстремальные задачи в этом классе отображений. Для некомпактных множеств С.А. Копанев и И.В. Кривяков рассмотрели вопрос о компактификации одного класса однолистных отображений. В.И. Кан получил точные оценки первых двух логарифмических коэффициентов производной на классе почти выпуклых функций, порожденных звездообразными функциями, а также указал области значений производных на подклассах почти выпуклых функций высшего порядка.

Томская научная школа функций комплексного переменного получила прочное, широкое признание в стране и за рубежом.

§ 3

В 1960–1970 гг. геометрические исследования в Томске интенсивно развивались. Значительно расширился круг лиц, занимающихся вопросами дифференциальной геометрии, росло число защит кандидатских диссертаций и опубликованных научных статей. Систематически издавался «Геометрический сборник» Томского университета. Обзор статей первых двадцати выпусков сборника был сделан Р.Н. Щербаковым в 1980 г., а позднее продолжен В.В. Слухаевым.

Дальнейшее развитие получил метод репеража подмногообразий (МРП). В работах Р.Н. Щербакова и В.В. Слухаева рассмотрены дифференциально-топологические аспекты метода в связи с теорией расслоения. Применение МРП позволило томским геометрам решить ряд известных задач Д.Ф. Егорова, Л. Бианки, Н.Г. Туганова, задачи об обобщенных поверхностях вращения и теории конгруэнций трехмерного пространства. Новые результаты были получены в теории комплексов и пар комплексов, теории векторных полей, дифференциальной геометрии неевклидовых пространств. Р.Н. Щербаков продолжал разрабатывать метод репеража подмногообразий и его применение к различным вопросам дифференциальной геометрии. В статьях «О системах внешних уравнений» (1967), «О неголономной геометрии» (1969), «Элементарно-алгебраический подход к исследованию внешних дифференциальных систем» (1970), «Эквиаффинная геометрия неголономных комплексов» (1970), «Репераж и расслоение» (1972), «Неметрическая флаговая дифференциальная геометрия» (1975) и др. определены пути новых исследований. Монография Р.Н. Щербакова «Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии», изданная в 1973 г., содержала результаты его многолетних исследований. Позднее научные интересы Р.Н. Щербакова были сосредоточены на вопросах неголономной геометрии и геометрии неевклидовых пространств. Вопросам обоснования дифференциальной геометрии посвящена статья Р.Н. Щербакова и В.В. Слухаева «Дифференциально-топологические аспекты метода Картана» (1973). В этом направлении работали Р.Н. Щербаков, Л.И. Магазинников, В.Я. Беркуцкий, Н.М. Онищук, Е.Т. Ивлев, А.А. Лучинин, Н.Н. Горбанев, В.В. Слухаев, В.А. Петин и другие.

Исследования по неевклидовой геометрии проходили в содружестве с профессором Б.А. Розенфельдом.

Большой цикл работ был выполнен по многомерной проективно-дифференциальной геометрии. Метод репеража подмногообразий с некоторыми обобщениями в работах А.А. Лучинина и Е.Т. Ивлева был применен к исследованию многомерных поверхностей. В частности, рассматривались системы неголономных подмногообразий. Е.Т. Ивлев рассмотрел различные виды дополнительных оснащений многомерных поверхностей в виде обобщенных эквипараметрических многообразий, многообразий пар непересекающихся подпространств. Значительные успехи были достигнуты в исследовании семейств прямых и d-плоскостей в N-мерном проективном пространстве. Прежде всего, получена подробная классификация линейчатых многомерных пространств P_n и подробно изучены многообразия достаточно общих классов. Наибольший интерес представляют геометрические образы: *K*-псевдофокальные семейства плоскостей, содержащие семейства неголономных многообразий; плоскостные поверхности; комплексы прямых и плоскостей. Каждый класс характеризуется определенным соотношением размерностей плоскости семейства, касательного пространства и числа главных параметров. Сводка основных результатов, полученных в направлении этих исследований, содержится в работе Л.З. Круглякова «К дифференциальной геометрии семейств плоскостей в проективном пространстве», первая часть которой опубликована в «Сибирском математическом журнале» в 1976 г., вторая и третья – депонированы ВИНИТИ в 1977 г. В разработке темы участвовали вместе с Л.З. Кругляковым его ученики.

Введенное томскими геометрами понятие неголономного подмногообразия оказалось плодотворным. Изучение неголономных подмногообразий привело к изучению неголономных многообразий. И.А. Печников детально исследовал Пфаффовы семейства параболических цилиндров и получил общие понятия внутренних и внешних инвариантов и сопряженностей для Пфаффовых систем общего вида. В работах В.В. Кайзера исследованы сужения, расширения и другие распределения, инвариантно связанные с неголономной поверхностью, и введено новое определение неголономной плоскости. К этой же области относятся работы Э.Д. Барыхтабакаева по теории неголономных конгруэнций и комплексов. В глобальной теории Пфаффовых многообразий В.Н. Черненко доказал теорему о соединимости двух любых неособых точек трехмерного дифференцируемого многообразия гладкой интегральной кривой данной системы Пфаффа.

Обзор большей части работ по теории геометрических образов, элементами которых служат кривые второго порядка и более общие алгебраические кривые и поверхности, был сделан В.С. Малаховским в статье «Дифференциальная геометрия многообразий фигур», опубликованной в сборнике «Итоги исследований по математике и механике за 50 лет» в 1967 г.

Отметим несколько более поздних работ. Г.Д. Толстова в статье «О комплексах коник в трехмерном аффинном пространстве» (1975) средствами МРП получила результаты, позволяющие дать для них классификацию. Более общий класс фигур, чем алгебраические, изучала Л.А. Зернышкина. Были рассмотрены подмногообразия конгруэнции винтовых линий и для более широкого класса кривых евклидова пространства.

С отъездом В.С. Малаховского в Калининград в 1968 г. его научные контакты с томскими геометрами, работавшими по его тематике, практически прекратились. Некоторые из них продолжали исследования самостоятельно (И.А. Печников, Н.В. Амишева, Г.П. Бочилло и другие).

Объединяющим центром стал научный геометрический семинар имени Н.Г. Туганова. С докладами на семинаре выступали, кроме томских математиков, многие известные ученые из других научных центров страны. Среди них были академик Н.Н. Яненко, академик А.Д. Александров, профессора М.А. Акивис, Б.А. Розенфельд, Н.И. Кованцов, Р.М. Гейдельман, Ю.Ф. Борисов, Г.Ф. Лаптев, В.В. Рыжков и другие.

В начале 1970 г. возникло непонимание в понятии неголономного многообразия между томскими и прибалтийскими геометрами (К.И. Грицевичюс, В.И. Близникас). К последним присоединился В.С. Малаховский. Велись научные споры и дискуссии на конференциях, что вполне естественно. В 1972 г. В.С. Малаховский выступил в печати со статьей, в которой сделана попытка опровергнуть метод репеража многообразий томских геометров. С ответной статьей в 1972 г. выступили Р.Н. Щербаков и В.В. Слухаев, а в 1975 г. вторично – Р.Н. Щербаков. Он показал, что все доказательства, полученные одним способом, могут быть переведены на язык другого способа. Однако созданное сомнение в исследованиях томских геометров вызвало неблагоприятные условия для их деятельности. Возникли трудности с новыми публикациями, защитой диссертаций, в объективном реферировании работ, не состоялась уже объявленная защита докторской диссертации Е.Т. Ивлева. Еще одним осложнением оказалось ухудшение здоровья ее руководителя Р.Н. Щербакова, вынужденного по этой причине оставить заведование кафедрой в 1975 г. В последние годы жизни, до конца 1987 г., его научные интересы были сосредоточены на вопросах неголономной геометрии и геометрии неевклидовых пространств. Был написан «Краткий курс дифференциальной геометрии» совместно с А.А. Лучининым, а также «Элементы векторного и тензорного анализа».

При участии профессора Томского педагогического университета Л.Ф. Пичурина были написаны популярные книги «Трое в одной лодке, не считая собаки» в серии «Рассказы сибирских ученых» (Новосибирск, 1975), в которой велись беседы о неевклидовой геометрии; «От проективной геометрии к неевклидовой» (1980) и «Дифференциалы помогают геометрии» (1982), вышедшие в издательстве «Просвещение» в Москве.

В 1971 г. профессору Р.Н. Щербакову было присвоено звание заслуженного деятеля наук РСФСР.

В.В. Слухаев (1940–1996) начал свою научную деятельность по проблеме эквиаффинной геометрии векторных полей, предложенной Р.Н. Щербаковым. Теорию векторных полей В.В. Слухаев связал с теорией комплексов прямых и неголономной геометрией. В своих работах он подробно изучает аффинно-симметрические векторные поля, и построенная теория применяется к вопросам гидромеханики. После защиты в 1966 г. кандидатской диссертации на тему «Эквиаффинная геометрия установившегося движения жидкости» он продолжал исследования по теории векторных полей и связанных с ней неголономных многообразий. Под влиянием работ П.К. Рашевского по сверхтензорному анализу В.В. Слухаев применил дифференциальные формы высшего порядка для получения необходимых и достаточных условий локальной интегрируемости дифференциальной системы на прямой. Интерес представляют исследования В.В. Слухаева по геометрии кусочно-линейных дифференциальных систем и неголономных многогранников. В последней опубликованной его работе «Линейные конгруэнции в евклидовом пространстве» обращено внимание на изучение линейчатых многообразий с особенностями.

В.В. Слухаева привлекали вопросы философии и методологические основы математики. В читаемом им оригинально разработанном курсе методологии математики он пытался познакомить слушателей с излагаемыми проблемами и многое выяснить для себя.

В 1972–1982 гг. В.В. Слухаев работал в Кемерове, с апреля 1982 г. он заведующий кафедрой геометрии, а с конца 1987 г. – руководитель геометрического семинара имени Н.Г. Туганова.

Н.Н. Горбанев провел исследования квазистационарного потока идеальной жидкости и некоторых классов векторных полей. Н.К. Смоленцев изучал геометрические свойства потоков идеальной и баротропной жидкости на компактных римановых многообразиях, используя метод геометризации механики сплошных сред. Позднее Н.К. Смоленцев защитил докторскую диссертацию. Он работает в Кемеровском университете.

Е.М. Горбатенко, начиная со своих первых работ, рассматривает общие проблемы репеража средствами современной алгебры. Его исследования дифференциальных систем с помощью дифференциальных операторов на модулях внесли вклад в обоснование дифференциальной геометрии. В более поздних работах Е.М. Горбатенко рассматривает вопросы о связностях и производных высшего порядка для систем внешних дифференциальных уравнений. Совместно с Т.М. Матвеенко в статье «Квантование линейных структур Дирака» показывается связь геометрии однородных пространств и квантово-внешних алгебр. Внимание Е.М. Горбатенко привлекли вопросы неголономной геометрии. Были рассмотрены характеристические классы неголономных распределений, каркасы неголономности систем внешних дифференциальных уравнений, неголономные системы уравнений Пфаффа и их нильпотенизация, флаги решений внешней дифференциальной системы с симплициальной точки зрения.

Н.М. Онищук изучала классы многообразий пар точек проективного пространства, в более поздних работах обратилась к задачам теории векторных полей. А.Г. Мизин исследовал торсы многомерных плоскостей проективного пространства, в другой работе он изучал фундаментальное соответствие между регулюсами и комплексами многомерных плоскостей проективного пространства. Н.П. Чупахин исследовал ассоциированные с семейством плоскостей композиции и связности, псевдофокальное соответствие в семействе плоскостей в многомерном проективном пространстве, его особенно привлекли вопросы методологии геометрии. М.С. Бухтяк рассмотрел ряд вопросов о построении геометрических объектов, инвариантно связанных с вырожденной метрикой на многообразии, а также о нахождении стационарных подгрупп для дифференциальных полуинвариантов кривой и представлении их точками проективной плоскости. Позднее он занимался определением геометрических свойств анизотропного материала при воспроизведении заранее определенной формы поверхности. Е.Е. Корякина сделала вывод уравнений Эйлера–Лагранжа в подвижном репере и указала их применение для изучения свойств геодезических кривых в римановой метрике.

Н.Р. Щербаков занимался исследованием методами проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Им дана классификация одного класса семейств плоскостей в многомерном проективном пространстве по строению многообразий особых точек. Позднее его привлекли компьютерное моделирование и некоторые применения дифференциальной геометрии к механике. С 1996 г. Н.Р. Щербаков заведует кафедрой геометрии, в 1999–2004 гг. он декан ММФ.

§ 4

С конца 60-х гг. в Томском университете под общим руководством доцента (с 1993 г. профессора) Исаака (Ицика) Хаимовича Беккера (1928–1997) развернулись исследования по теории абелевых групп и модулей в нескольких направлениях. Среди них нужно выделить: изучение свойств колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов, аффинных групп (голоморфов), абелевых групп и модулей; решение задач корректностей и близких к ним для абелевых групп модулей и аффинных групп; вычисление групп когомологий и решение задач, связанных с некоторыми функторами в категориях модулей или абелевых групп.

Основанием для проводимых исследований были идеи об установлении взаимосвязи между свойствами абелевых групп, модулей и их кольцами эндоморфизмов, группами автоморфизмов и наложение некоторых ограничений на абелевы группы, модули, на их кольца эндоморфизмов и группы автоморфизмов, а также использование близких понятию изоморфизма групп и модулей, в частности применение теории квазиразложений абелевых групп без кручения.

Обобщением известного свойства, что линейные преобразования (операторы) векторного пространства образуют кольцо, стало исследование малоизученных колец эндоморфизмов ряда классов K-модулей (модулей над кольцом K). Отметим основные результаты, полученные в этом направлении: дана полная характеристика нуль-радикалов и радикалов Джекобсона колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения конечного ранга и некоторых групп бесконечного ранга; получены описание регулярно замкнутых абелевых групп без кручения, принадлежащих широкому классу групп, и классификация групп автоморфизмов регулярно полных и регулярно простых групп из этого класса; установлены свойства голоморфов абелевых групп, выделены классы абелевых групп, определяющихся своими голоморфами; установлены критерии определения абелевых групп без кручения своими кольцами эндоморфизмов как в классе всех абелевых групп без кручения, так и в классе всех абелевых групп.

Основным кругом научных интересов И.Х. Беккера были голоморфы абелевых групп и группы когомологий малых размерностей. Голоморф абелевой группы представляет собой полупрямое расширение этой группы с помощью её группы автоморфизмов. Исследование голоморфов соединяет в себе методы коммутативной и некоммутативной алгебры. Отдельные результаты о голоморфах конечных и конечно-порожденных групп позволили И.Х. Беккеру значительно продвинуться в изучении голоморфов бесконечных групп, полностью решить вопрос о совершенности голоморфов абелевых групп определенного класса. Были найдены различные классы абелевых групп по своим голоморфам. Им были получены когомологические характеристики абелевых групп без кручения. Группы когомологий представляют интерес не только как алгебраический объект, но также в связи с их приложениями в топологии и теоретической физике. В дальнейших работах И.Х. Беккер получил ряд глубоких результатов в теории аффинных групп, модулей и колец, в которых ему удалось установить связи своих исследований с теорией категорий. Развитие этого направления было позднее продолжено его учениками. И.Х. Беккер провел большую работу по развитию специализации по алгебре на ММФ. Среди его учеников 14 кандидатов и 4 доктора физико-математических наук.

П.А. Крылов начал заниматься научными исследованиями в области алгебры уже в студенческие годы. В выполненной им работе получено необходимое и достаточное условие возможности продолжения всякого частичного автоморфизма примарной абелевой группы без элементов бесконечной высоты до автоморфизма самой группы, состоящее в принадлежности группы к замкнутым группам с конечными ульмовскими инвариантами. Были получены другие признаки продолжения частичных автоморфизмов. П.А. Крылов развил некоторые направления теории абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Им основана и разработана теория вполне транзитивных абелевых групп. Основные его результаты относятся к теории групп и модулей с наследственными кольцами эндоморфизмов и групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов, а также к вопросам строения абелевых групп с большим числом эндоморфизмов. Позднее П.А. Крылов приступил к изучению групп гомоморфизмов и тензорных произведений абелевых групп как модулей над кольцами эндоморфизмов. Это позволило объединить два направления в теории колец эндоморфизмов – изучение кольцевых свойств и исследование групп как модулей над этими кольцами. П.А. Крылов решил некоторые задачи из теории групп расширений – одной из классических областей алгебры, в частности из сборника нерешенных задач, известного под названием Коуровской тетради. Привлекли внимание П.А. Крылова аффинные группы модулей и их автоморфизмы, E-модули и T-модули, радикалы и кручения в категориях модулей, обобщенные и треугольные кольца матриц и модули над ними. В 1975 г. П.А. Крылов защитил кандидатскую диссертацию «Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения», а в 1991 г. – докторскую диссертацию «Кольца эндоморфизмов и структурная теория абелевых групп». В 1996 г. он был отмечен премией ТГУ за цикл работ по теме «Некоторые проблемы теории абелевых групп и модулей». С 1992 г. П.А. Крылов является профессором, а с августа 1997 г. – заведующим кафедрой алгебры и руководителем научного алгебраического семинара. Систематическое изложение теории колец эндоморфизмов абелевых групп было дано в совместных работах П.А. Крылова и профессоров из Москвы А.В. Михалева и А.А. Туганбаева: «Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов» (Томск, 2002), «Endomorphism rings of Abelian groups» (J. Math. Sci. 2002. № 3).

С.Ф. Кожухов проявил способности к математике со школьной скамьи, был победителем многих математических олимпиад, в том числе Всероссийской в 1966 г. Поступив в 1967 г. в Томский университет, он специализировался по алгебре, его дипломная работа «Некоторые свойства вполне разложимых абелевых групп без кручения» была отмечена дипломом Министерства высшего образования. Областью научных интересов С.Ф. Кожухова является теория абелевых групп без кручения конечного ранга с конечными группами автоморфизмов. Им построена структурная теория для квазиразложимых свободных от нильпотентностей абелевых групп без кручения конечного ранга, найдена система инвариантов, описывающих данные группы с точностью до изоморфизма, позволяющая изучать с их помощью строение абелевых групп. Полученные результаты составили содержание его кандидатской диссертации «Группы автоморфизмов абелевых групп без кручения», защищенной в 1979 г., а позднее, в 1994 г., – докторской диссертации «Абелевы группы без кручения с конечными группами автоморфизмов». В течение нескольких лет С.Ф. Кожухов был сотрудником НИИПММ, где возглавлял отдел математики. С 1996 г. профессор С.Ф. Кожухов работает в Сургутском университете.

А.М. Себельдин изучал абелевы группы без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов. Им изучались полные прямые суммы абелевых групп определенного типа, а также установлены критерии определяемости абелевых групп своими кольцами эндоморфизмов в классе всех абелевых групп. В 1997 г. А.М. Себельдин защитил докторскую диссертацию, работает в Нижегородском педагогическом университете.

Ю.Б. Добрусин исследовал один класс квазисервантно инъективных групп.

С.Я. Гриншпон разработал новое направление исследования вполне характеристических подгрупп абелевых групп, связанное с понятием «вполне транзитивности». Он открыл новые классы вполне транзитивных групп, получил для них описание вполне характеристических подгрупп и их решеток, установил критерии вполне транзитивности *K*-прямых сумм групп различных классов. Для сепарабельных *p*-групп получил полное описание вполне характеристических подгрупп и их решеток. Аналогичные результаты были получены для сепарабельных групп без кручения, векторных групп и смешанных вполне разложимых групп, были изучены абелевы группы из различных классов, в которых решетка вполне характеристических подгрупп дистрибутивна, обобщенно дистрибутивна, является цепью. С.Я. Гриншпон исследовал группы, для которых верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора–Шредера–Бернштейна. Найденные им необходимые и достаточные условия для *p*-групп А и В, при которых изоморфизм групп эндоморфизмов влечет изоморфизм самих групп А и В, дают полное решение одной известной проблемы Фукса, поставленной в его монографии по абелевым группам. Исследование вопроса о равенстве нулю группы гомоморфизмов для однородной сепарабельной группы дало возможность описать коузкие группы. В 1985 г. С.Я. Гриншпон защитил кандидатскую диссертацию, а в 2000 г. – докторскую «Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность». В продолжение исследований С.Я. Гриншпон с И.Э. Гриншпон рассмотрели подобные сепарабельные *p*-группы и почти изоморфизмы. В работе с Т.А. Ельцовой изучается гомоморфная устойчивость абелевых групп. М.С. Гриншпон рассмотрел представляющие факторы между категориями существования банаховых модулей и структуры некоторых пространств как модули.

А.Р. Чехлов разработал эффективные методы исследования абелевых групп с большим числом эндоморфизмов. Он изучал классы, близкие к алгебраически компактным. В 1985 г. А.Р. Чехлов защитил кандидатскую диссертацию, а в 2003 г. – докторскую. В 2004 г. им опубликован сборник задач по теории групп, получивший гриф УМО.

Под руководством профессоров П.А. Крылова и С.Я. Гриншпона проводят исследования и защитили кандидатские диссертации Е.Г. Пахомова, А.И. Шерстнева, М.А. Приходовский, В.Б. Коновалов и другие.

С.К. Росошек провел систематическое исследование корректных и чисто корректных модулей в различных категориях, представляющее интерес для гомологической теории модулей и теории абелевых групп. В.А. Романович изучил отношения ортогональности на упорядоченных множествах, играющих важную роль в теории размерности решеток (структур). Позднее внимание С.К. Росошека привлекли задачи компьютерной и визуальной алгебры. Он руководил группой педагогов-математиков, разработавшей систему компьютерных тестов по математике и методику измерения успешности учащихся по итогам ее выполнения. Работа была выполнена по заказу Министерства образования.

В.М. Мисяков исследовал вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп.

§ 5

Исследования по функциональному анализу успешно развивались. В 1968 г. З.И. Клементьев был утвержден в ученом звании профессора и возглавил кафедру теории функций.

З.И. Клементьев с группой учеников продолжал построение расширенной теории мер. В статьях 1965 г. изучались полуупорядоченные пространства абстрактных мер с ограниченной *P*-вариацией. В цикле работ с Г.С. Шахновичем были рассмотрены вопросы теории векторнозначных мер и классы пространств локально суммируемых функций. В нескольких работах З.И. Клементьева освещены вопросы математического анализа в абстрактных пространствах, среди них построение абстрактного интеграла Даниеля, аналитическое представление линейных операторов в функциональных полуупорядоченных пространствах, полнота метрического пространства с мерой, построение пространства суммируемых функций, мера в локально компактном пространстве со значениями в регулярном полуупорядоченном пространстве. В этом классе пространств исследуются кольца операторов в его подпространствах. Для пространств числовых последовательностей аналогичное исследование было проведено Г. Кёте и О. Теплицем в 1934 г.

Обобщение теории вложения на случай векторнозначных мер рассмотрено в совместной работе с А.А. Бокком, а интегралы от обобщенной параметрической функции – с Р.М. Малаховской. Совместно с И.П. Ефремовой изучалось продолжение векторной меры со значениями в рефлексивном *K*-пространстве и теория абстрактных интегралов в полуупорядоченных пространствах. Построение теории меры в локально компактном пространстве со значениями в регулярном полуупорядоченном пространстве проведено в работах с В.Н. Рудиным. Одновременно З.И. Клементьевым были опубликованы написанные на основе многолетнего опыта «Курс лекций по теории функций действительного переменного» (1969) и «Лекции по математическому анализу» в 5 выпусках (1975–1987); 6-й выпуск остался в рукописи.

Г.В. Сибиряков после окончания университета, будучи в аспирантуре под руководством З.И. Клементьева, занимался изучением некоторых операторов в пространстве обобщенных функций. В 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию «Характеристические операторы и разностные уравнения в пространстве распределений». В следующие годы он при участии Е.А. Арайса разрабатывал систему программирования «Авто-Аналитик». Г.В. Сибиряков ввел понятие *A*-оператора для обобщенных функций, аналогичного операции умножения обычных функций в операционном исчислении.

Интерес к функциональному анализу и топологии возник у группы студентов физических и математических специальностей, к которым присоединился И.К. Слепухин. В эту группу входили А.В. Оськин, Б.В. Соколов, Ю.В. Зюзьков, С.П. Гулько, Е.М. Горбатенко, В.В. Мишкин, Л.Е. Портнов и другие. В самодеятельном семинаре они изучали сочинения Н. Бурбаки, а затем по инициативе Г.В. Сибирякова продолжили изучение функционального анализа по книге Н. Данфорда и Дж. Шварца.

И.К. Слепухин (1943–2000) в 1963 г. поступил на радиофизический факультет, но, увлекшись математикой, перешел на механико-математический. После окончания университета был аспирантом, преподавателем и научным сотрудником НИИПММ. В 1981 г. защитил кандидатскую диссертацию «Булевы системы множеств и функций в топологии». С 1991 г. преподавал на кафедре теории функций. И.К. Слепухин в цикле исследований обосновал возможность построения регулярного оператора усреднения посредствам обратных спектров. В рукописях остались работы по теории игр и многозначному нелинейному анализу.

Г.В. Сибиряков совместно с А.В. Гулимовым доказал, что в бесконечномерном локально-выпуклом пространстве замкнутое выпуклое множество может быть ретрацировано в его границу.

С.П. Гулько стал активным участником кафедрального семинара по функциональному анализу и вскоре получил ряд оригинальных результатов по геометрической теории банаховых пространств и топологии. Сообщения об этих работах было одобрительно принято на топологическом семинаре Московского университета. В первой статье, опубликованной совместно с А.В. Оськиным, содержится полная изоморфная классификация пространств непрерывных функций на вполне упорядоченных бикомпактах. Это было решением проблемы польских математиков А. Пелчинского и А. Бессаги. Другое решение было дано ленинградским математиком С.В. Кисляковым. В 1979 г. С.П. Гулько защитил кандидатскую диссертацию «Некоторые топологические свойства функциональных пространств», научным руководителем был Г.В. Сибиряков. В своих последующих работах С.П. Гулько получил решение двух проблем Х. Корсона. Было доказано, что Σ-произведение любых семейств метрических пространств является коллективно нормально пространством, а непрерывный образ компакта Корсона также является компактом Корсона. Было установлено, что пространство всех непрерывных функций в топологии поточечной сходимости на замкнутом подмножестве Σ-произведения сепарабельных метрических пространств всегда является линделефовым пространством.

С.П. Гулько предложил новый метод построения полурешеток ретракций на замкнутых подмножествах Σ-произведений. По предложению математика С. Негрепонтиса, один из важных классов компактов получил название компактов Гулько. Итогом названных работ стала докторская диссертация «S-произведения и проблема классификации в топологической теории пространств функций», защищенная в Московском университете в 1991 г. С марта 1989 г. С.П. Гулько заведует кафедрой теории функций, с 1991 г. – профессор. В продолжающихся исследованиях С.П. Гулько и его учеников изучаются вопросы эквивалентности и взаимосвязи топологических пространств с использованием понятий оператора продолжения, компактов Эберлейна, свободных топологических групп. Т.Е. Хмылева установила, что локальная компактность является инвариантом относительно изоморфизмов пространств ограниченных непрерывных функций. В работе Л.В. Гензе и

Т.Е. Хмылевой отмечены свойства топологических пространств, обобщающих понятие удвоения пространств по П.С. Александрову. В другой статье Л.В. Гензе рассмотрена дополняемость пространства c_0 в некоторых функциональных пространствах. А.Г. Лейдерман изучал пространство непрерывных функций на бикомпактах Корсона и плотность метризуемых подпространств компактов Корсона. Для всюду плотных подпространств компактов Эберлейна он доказал, что таковыми могут быть метризуемые подпространства.

Г.А. Соколов, одаренный слепой математик, защитивший кандидатскую диссертацию, работал под непосредственным руководством С.П. Гулько. Им было введено и начато исследование понятия двойственности между математическими играми, в частности, он нашел приложение игр Шоке и Банаха–Мазура в топологической теории пространств непрерывных функций. В.Р. Лазарев исследовал характер пространства непрерывных функций в тонкой топологии и подпространства многочленов в пространстве непрерывных вещественных функций с топологией поточечной сходимости. Я.С. Гриншпон исследовал свойства последовательностей в линейно-упорядоченных множествах, исходя из свойств их монотонных подпоследовательностей, и доказал, что из любой последовательности в линейно-упорядоченном множестве можно выделить монотонную подпоследовательность. Дальнейшие его работы посвящены изучению топологии раздельной непрерывности. Им доказано, что произведение паракомпактного и разреженного сильно нульмерного пространств, наделенное вполне регулярной топологией раздельной непрерывности, является коллективно нормальным. А.В. Арбит доказал инвариантность свойства Линделефа относительно равномерных гомеоморфизмом пространств функций с топологией поточечной сходимости. А.Н. Долгушев, выпускник Новосибирского университета, ученик профессора С.С. Кутателадзе, разрабатывал теорию границ Шоке и их приложение к функциональным пространствам. Некоторым вопросам спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов посвящены работы А.Г. Максаковой. Н.Н. Круликовский занимался вопросами истории развития спектральной теории [198 а].

С.Г. Суворов, начинавший свой путь в науку студентом Томского университета, после окончания Донецкого университета и аспирантуры вернулся в Томск. Его научные интересы, сложившиеся в Донецке, относились к топологической характеристике нелинейных эллиптических операторов. Основным методом исследования была теория Люстерника–Шнирельмана, изложенная в статье С.Г. Суворова, опубликованной в 1972 г. в «Сибирском математическом журнале». В ряде его работ проведено изучение характеристик типа индекса Морса, условных экстремумов функционалов с разрывными градиентами, критические множества отображений банаховых пространств в евклидовы, критические множества в задачах оптимизации. Многие результаты исследования множества собственных функций нелинейных эллиптических операторов вариационного типа впервые опубликованы в его книге «Собственные функции нелинейных эллиптических операторов» в 1982 г. Наряду с традиционными вопросами теории рассмотрены двусторонние оценки критических и собственных чисел, сходимость приближений по методу Ритца, позволяющая в некоторых случаях получить их асимптотическое поведение, исследованы конкретные задачи с функциональными и операторными ограничениями. В частности, эллиптические задачи типа Дирака, Стеклова с периодическими граничными условиями и операторами общей природы. В течение нескольких лет С.Г. Суворов заведовал кафедрой теории функций до перехода в докторантуру в 1979 г. По тематике и под руководством С.Г. Суворова проводил исследования М. Насреддинов, успешно защитивший кандидатскую диссертацию. С 1984 г. С.Г. Суворов работает в научных учреждениях Донецка.

§ 6

Исследования по теории вероятности и математической статистике и их приложениям на механико-математическом факультете начались в 1962 г. работами В.Г. Фаста по проблеме Тунгусского метеорита, а позднее разработанные методы применялись для решения статистических задач теории ударного кратерообразования на планетах.

В 1968 г. на факультете сформировалась группа исследователей по теории надежности, разрабатывавшая вопросы динамического резервирования. В работах Г.Г. Пестова и Л.В. Ушаковой были получены многие характеристики оптимальных стратегий резервирования и найдены упрощенные алгоритмы оптимального резервирования. В этом же направлении продолжал исследования В.А. Томиленко, который получил обобщенные результаты при более слабых предположениях. В его последующих работах рассматриваются вопросы, касающиеся интегрирования выпуклых и логарифмически выпуклых функций, часто встречающихся в прикладных исследованиях. В 1972–1977 гг. В.А. Томиленко построил модель двухступенчатого резервирования с дробной кратностью, а позднее совместно с Г.Г. Пестовым – общую модель оптимального управления системой с невозобновляемым резервом.

С.А. Разин и В.А. Романович рассматривали проблемы надежности элементов вычислительной техники в статистическом режиме.

С 1976 г. начались исследования по теоретическим проблемам теории вероятности и математической статистики. Э.Н. Кривяковой была построена статистика ω^2 для некоторых параметрических семейств распределений в одномерном и многомерном случаях. Для многомерного равномерного распределения построена аналогичная статистика и составлены таблицы для ее функции распределения. Ю.К. Устинов провел исследования по теории марковских процессов в пространствах входов Дынкина. Он же, основываясь на понятии *К*-регулярности, получил обобщение теоремы Колмогорова о представлении случайных полей их безусловными распределениями, а позднее изучал понятие условной инвариантности распределений относительно сигма-алгебры событий и его применения в теории случайных процессов и полей. В 1968–1970 гг. в исследованиях по теме «Решение задач надежности элементов вычислительной техники на ЭЦВМ» участвовали В.Г. Фаст, В.А. Романович, Ю.К. Устинов, С.А. Разин, Э.Н. Кривякова, Г.П. Прищепа.

В 1972 г. В.Г. Фаст и Н.А. Исаева подготовили и издали задачник по теории вероятностей для ММФ.

Исследования по теории упорядоченных систем были начаты в 1964 г. Г.Г. Пестовым, который ввел понятие *n*-упорядоченного множества на основе обобщения понятия ориентации *n*-мерного евклидова пространства. Сначала было введено и исследовано понятие двуупорядоченного множества. В 1965 г. была сформулирована аксиоматика *n*-упорядоченного множества и рассмотрены различные определения и характеристики *n*-упорядоченных систем. В 1971 г. А.И. Терре и Н.Б. Бобров доказали теорему о реализуемости всех пятерок точек на евклидовой плоскости на основании свойств двуупорядоченных систем. В последующие годы Г.Г. Пестов и А.И. Терре распространили исследования на теорию линейно упорядоченных полей.

Результаты этих исследований изложены в книге Г.Г. Пестова «Строение упорядоченных полей», изданной в 1980 г. В этом направлении работали также Ю.К. Кошельский и А.И. Соколова. В совместной работе Г.Г. Пестова и Н.Ю. Галановой получены глубокие результаты о строении нестандартной вещественной оси. Н.Ю. Галанова нашла мощность множества симметричных фундаментальных сечений, в частности для поля ограниченных формальных степенных рядов. В другой работе ею рассмотрен один класс вещественных замкнутых упорядоченных полей. В 1976–1977 гг. Г.Г. Пестов изучал теорию обобщенных функций на упорядоченных полях. А.И. Забарина занималась теорией циклически упорядоченных групп. Позднее Г.Г. Пестов провел исследования замыканий упорядоченных полей. Новые понятия и методы теории двумерно упорядоченных полей были изложены в его монографии «Двумерно упорядоченные поля» (2003). Итоги многолетней работы Г.Г. Пестова подведены в его докторской диссертации «К теории упорядоченных полей и групп», защищенной в ноябре 2004 г. в Институте математики и механики Уральского отделения РАН. В диссертации разработано новое направление раздела современной алгебры, имеющего выход в другие области математики. С мая 2005 г. Г.Г. Пестов – профессор кафедры математического анализа ТГУ.

§ 7

В 1967 г. в связи с отъездом профессора Г.И. Назарова произошли изменения на кафедре теоретической механики. Его ученики Ф.С. Владимиров, С.С. Торбунов, В.Г. Цепелевич и другие продолжали научную работу в различных областях гидромеханики.

Ф.С. Владимиров в статье «К вопросу о построении общего решения для уравнений осесимметрического течения несжимаемой жидкости» с помощью интегрального оператора Бергмана построил общее решение уравнения для функции тока и потенциала. В другой работе методом Бергмана была решена плоская задача о симметричном обтекании клина дозвуковой струей газа, вытекающей из канала с параллельными стенками. С.С. Торбунов исследовал обтекание наклонной пластинки весомой несжимаемой жидкостью. Он дал общее приближенное решение задачи о сверхзвуковом истечении газа из плоского сопла методом Бергмана–Назарова и аналитически доказал апериодичность такого истечения и появления скачков уплотнения. В.Г. Цепелевич получил для магнитной газодинамики уравнение, аналогичное уравнению Седова, в переменных давление – функция тока, дал критерий существования решения, а также указал некоторые особенности обобщенных течений. Методом Бергмана–Назарова найдено общее решение уравнения движения газа в трансзвуковой области. В.Г. Цепелевич указал приближенный метод решения плоской задачи о безвихревом установившемся движении газа, основанный на сведении уравнения Седова к уравнению Чебышева методом подвижной аппроксимации. В.П. Харитонов рассмотрел в криволинейных ортогональных координатах некоторые случаи винтовых движений идеально сжимаемой жидкости. В другой его работе указано применение указанного ранее метода к задаче о винтовых движениях сжимаемой жидкости внутри кругового конуса, получено аналитическое решение уравнения для функции тока и найдены параметры течения.

С 1967 по 1979 г. кафедрой теоретической механики заведовал В.Е. Томилов. Под его руководством сформировалась группа ученых, работающих над вопросом о нестационарном теплообмене твердых тел с потоками жидкостей и газов. Теоретическое исследование этого теплообмена основывается на решении сопряженных задач. Рассмотрен теплообмен при вынужденной конвекции для случая неустановившегося движения вязкого газа. Предложены аналитические методы решения задач, основанные на введении в исходную краевую задачу известной заранее скорости потока осевой температуры газа. Рассмотрен полуаналитический метод решения внутренних сопряженных задач и с его помощью изучен ряд вопросов теплообмена. Проведено исследование нестационарного теплообмена на начальных термических участках при ламинарном течении несжимаемой жидкости с учетом осевой теплопроводности. Методом дробных шагов на основе полных уравнений Навье–Стокса проведен численный анализ сопряженного теплообмена и изучен теплоперенос при пульсирующем течении вязких жидкостей в каналах различной формы. В этих работах принимали участие В.И. Кондрашов, В.Ф. Горбунов, С.Г. Иванушкин, Л.В. Ким, А.М. Бубенчиков и другие.

В.А. Штанько исследовал задачи истечения жидкости и обтекания тел. В дальнейшем им изучались задача о струйном обтекании пластинки, в центре которой расположен источник или сток, а также обратная задача о влиянии встречной струи на сопротивление тела. В.А. Штанько выезжал для преподавательской работы в Камбоджу и Алжир, повышал квалификацию в одном из университетов Парижа. Несколько лет он заведовал кафедрой теоретической механики и был деканом ММФ.

А.М. Бубенчиков окончил механико-математический факультет в 1976 г. В последующие годы был аспирантом, старшим преподавателем, сотрудником НИИПММ, доцентом кафедры теоретической механики, заведовал кафедрой в 1987–1991 гг., был докторантом. Научные интересы его относятся к вычислительной гидрогазодинамике, проблемам тепломассообмена, магнитной гидродинамике, их приложениям. Он разрабатывал эффективные алгоритмы численного решения задач вязкой жидкости. Для интегрирования связанных скорость – давление эллиптических уравнений был применен новый маршевый способ, для численного интегрирования уравнений Навье–Стокса в сложных областях разработаны способы с использованием неортогональных координат и неразнесенных сеток. Для несимметричных течений при использовании цилиндрических, эллиптических, тороидальных координат получено нелокальное граничное условие для всех гидродинамических величин. Разработана эффективная вычислительная технология для реализации многопараметрических моделей турбулентного переноса. Решены связанные задачи электрогазодинамики и тепломассообмена применительно к импульсной технике, изучены резонансные эффекты в системе кровообращения. В ноябре 1994 г. А.М. Бубенчиков защитил докторскую диссертацию «Тепло- и массообмен в каналах импульсных систем и энергетических устройств». С 1995 г. – профессор, а с 2000 г. – заведующий кафедрой теоретической механики.

§ 8

Новое научное направление появилось в 1966 г. на механико-математическом факультете с приездом по распределению на работу в ТГУ из Саратова Анатолия Михайловича Гришина, где он окончил университет и аспирантуру в педагогическом институте. Его научным руководителем был доцент А.И. Говядинов. На выбор темы исследования и кандидатской диссертации большое влияние оказал профессор О.М. Тодес из Ленинградского военного инженерно-технического командного училища, один из создателей теории теплового взрыва. Кандидатскую диссертацию «Некоторые задачи теории воспламенения» А.М. Гришин защитил в Томске в феврале 1967 г. В этой работе он развил новый метод определения критических условий теплового взрыва, когда задача сводится к определению собственных значений краевой задачи для линейных стационарных уравнений эллиптического типа.

В следующем году было начато чтение курса лекций по аэротермохимии. Аэротермохимия – это наука о течении реагирующих сред, рассматривающая математические модели термохимических разрушений реагирующих тел и методов решения соответствующих уравнений математической физики. Методы аэротермохимии позволили решить некоторые практические задачи, связанные с тепловой защитой сверхзвуковых аппаратов, тепло- и массопереноса в конверторах, пожаров и взрывов, безопасности в шахтах, разработать математическую модель верховых и интенсивных низовых лесных пожаров.

Значительный интерес представляет качественный анализ решений некоторых нелинейных краевых задач для параболических уравнений.

На механико-математическом факультете в 1977 г. была открыта кафедра физической механики, позднее получившая расширенное название кафедры физической и вычислительной механики. В НИИПММ в 1972 г. был создан сектор аэротермохимии, с 1975 г. – лаборатория, а с 1972 г. – отдел механики реагирующих сред.

Научные интересы А.М. Гришина и его сотрудников сосредоточились в области механики сплошных реагирующих сред и вычислительной математики. На формирование тематики научных исследований большое влияние оказали академики Н.Н. Яненко и Л.И. Седов. В круг исследований вошли вопросы математического моделирования проблем механики жидкости, газа, плазмы и численного решения сложных задач математической физики. Кроме того, были установлены прочные деловые связи с Институтом механики МГУ (директор академик Г.Г. Черный) и Московским институтом теплотехники, Вычислительным центром Академии наук (директор академик А.А. Дородницын) и другими научными и научно-производственными объединениями.

В 1981 г. А.М. Гришин защитил докторскую диссертацию «Математическое моделирование некоторых аэротермохимических явлений». В этой работе он развил новое научное направление – сопряженные задачи механики реагирующих многофазных сред и экологий. При динамическом и тепловом взаимодействии систем материальных тел и сред необходимо учитывать влияние этого взаимодействия на состояние системы. Условия взаимодействия на границах раздела сред называются условиями сопряжения, или сшивками. А.М. Гришиным разработаны новые математические модели тепло- и массопереноса в пористом реагирующем теле, даны новые постановки и решения сопряженных задач механики реагирующих тел в связи с проблемами входа тел в плотные слои атмосферы с большой сверхзвуковой скоростью, развита теория гетерогенного воспламенения и сгорания некоторых типов ракетного топлива, рассмотрен новый принцип тепловой защиты гиперзвуковых аппаратов. В дальнейших работах дана теория возникновения и распространения лесных пожаров, позволяющая прогнозировать экологические последствия пожаров и предельные условия их распространения, и рекомендована новая концепция борьбы в лесными пожарами путем малых энергетических воздействий. Наряду с созданием математической теории изучаемых явлений проводились и эксперименты.

Исследования А.М. Гришина по механике сопровождаются развитием математических методов. При решении сложных нелинейных задач в теории горения и тепловой защиты гиперзвуковых аппаратов, теории пожаров А.М. Гришиным разработан итерационно-интерполяционный метод решения краевых задач математической физики для уравнений всех основных типов. В теории теплового взрыва он предложил и обосновал метод линеаризации нелинейных краевых задач для уравнений эллиптического типа. Для численного решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра разработан новый метод двустороннего приближения. Представляют несомненный интерес оригинальные методы анализа устойчивости решения задач теории теплового взрыва и теории горения, включая теорию лесных пожаров, а также методика риск-анализа природных техногенных катастроф, сочетающая методы теории вероятностей и методы математического и физического моделирования, широко применяемые в механике сплошных сред.

Научный коллектив, занимающийся вопросами механики реагирующих сред, образовался в основном из сотрудников кафедры физической механики и НИИПММ.

В.И. Зинченко занимался вопросами тепло- и массообмена в реагирующих средах. В 1975 г. защитил кандидатскую диссертацию «Влияние неравновесных гомогенных и гетерогенных химических реакций на характеристики нестационарного и квазистацинарного тепло- и массообмена». Позднее участвовал в разработке новых математических моделей процесса переноса в реагирующих газах и углеграфитовых теплозащитных материалах. В 1991 г. защитил докторскую диссертацию, с 1992 г. – профессор кафедры физической и вычислительной механики. В 1995–1998 гг. – проректор университета по научной работе, с 1998 г. – заместитель главы администрации Томской области.

А.Я. Кузин заинтересовался аэротермохимией будучи студентом и выполнил дипломную работу «Решение некоторых задач аэротермохимии». По окончании университета работал научным сотрудником в НИИПММ. Основной областью его научных интересов было решение обратных задач. Им разработаны новые регуляризирующие численные алгоритмы восстановления характеристик теплообмена на поверхностях тел в условиях активной и пассивной теплозащиты. Методами решения многомерных прямых и обратных задач достаточно полно изучены и обоснованы новые оригинальные способы управления тепловыми режимами сверхзвуковых летательных аппаратов. Результаты исследований в области граничных обратных задач легли в основу конструирования датчиков теплового потока различного целевого назначения.

Интенсивные исследования по сопряженным внутренним задачам механики реагирующих сред проводились доцентом Н.А. Игнатенко совместно с другими сотрудниками.

С полным основанием можно говорить о возникновении в Томском университете научно-педагогической школы «Сопряженные задачи механики и экологии». Профессор А.М. Гришин отмечает несколько этапов формирования школы. На первом этапе (1963–1977) были поставлены и аналитически решены задачи теории воспламенения и горения различных твердых реагирующих веществ. При этом был разработан новый итерационно-интерполяционный метод (ИИМ) решения задач математической физики. Второй этап (1974–1980) характеризуется теоретическим исследованием нестационарного тепло- и массообмена реакционноспособных тел с потоком реагирующего газа. Были разработаны новые математические модели и программы моделирования прикладных задач. В исследованиях тепло- и массообмена участвовали В.Н. Берцун и В.М. Агранат. Оригинальная методика решения обратных задач аэротермохимии дала возможность определения некоторых характеристик хода химических реакций. На третьем этапе (1980–1999) создана общая математическая модель лесных пожаров. На четвертом этапе (с 1999 г.) основное внимание уделяется созданию и развитию физико-математической теории катастроф.

Одновременно шла организационная и педагогическая деятельность по подготовке специалистов разных уровней. Созданы кафедра физической и вычислительной механики, научные лаборатории. Много сделано по созданию учебных пособий и монографий по отдельным проблемам сопряженной аэротермохимии, подготовлено 10 докторов и более 50 кандидатов наук, оказана помощь в организации и развитии кафедры вычислительной математики в Кемеровском университете.

§ 9

Открытие в Томском университете в 1957 г. кафедры прикладной и вычислительной математики было вызвано научным и техническим прогрессом, когда потребовалось создать новые технические средства вычислений и выработать принципиально новые вычислительные методы.

В работах томских ученых вопросы вычислительной математики рассматривались при решении задач астрономии, теоретической механики, математической физики, некоторых технических вопросов.

Перед кафедрой, прежде всего, возникли задачи организации обучения студентов по новой специализации «Вычислительная математика». Назначенный заведующим кафедрой доцент Г.А. Бюлер и первые преподаватели кафедры были направлены в Московский университет на курсы вычислительной математики. Постепенно разрабатывались общие и специальные курсы лекций. Первые группы вычислителей проходили практику в вычислительном центре Московского университета, а с 1965 г. – в ВЦ СО АН и на заводе математических машин в Томске. В 1959 г. состоялся первый в Сибири выпуск математиков-вычислителей.

Научные исследования на кафедре вычислительной математики и компьютерного моделирования ведутся по численным и аналитическим методам решения задач математической физики, теории интеллектуальных систем и параллельным компьютерным технологиям.

При становлении научной тематики существенное влияние оказали выпускники факультета академик Н.Н. Яненко и профессор Ю.С. Завьялов. Книга Н.Н. Яненко по методу дробных шагов была изучена на кафедральном семинаре под руководством Р.М. Малаховской и способствовала развитию нового научного направления по численным методам решения многомерных краевых задач. Ю.С. Завьялов, создатель научной школы по теории сплайнов, привлек к ней внимание сотрудников кафедры, он неоднократно приезжал для чтения лекций студентам и преподавателям ММФ.

Доцент Р.М. Малаховская (1926–1998) была сотрудником кафедры с 1957 г. Ее научные интересы были в области операционного исчисления и обобщенных функций. Кандидатскую диссертацию и последующие публикации она посвятила построению алгебраического и операционного исчисления на основе понятия и свойств обобщенных функций Соболева–Шварца и рассмотрению приложений теории обобщенных функций и алгебраического операционного исчисления к различным задачам математической физики. Она занималась также вопросами корректной постановки задач математической физики и методов их решения, в том числе численных. В последние годы жизни предметом ее исследований были краевые задачи для уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах. Р.М. Малаховской принадлежат монографии «Алгебраическое операционное исчисление и его приложения» в 2 частях и «Основные вариационные методы в математической физике».

Приложение теории разностных схем для численного расчета на ЭВМ различных задач математической физики, газо- и гидромеханики и других областей естествознания постоянно входили в круг научных интересов сотрудников кафедры. В этом направлении проводили исследования М.Д. Михайлов, Н.Н. Меркулова, Т.Г. Погорелова с участием студентов-дипломников. В одной из работ М.Д. Михайлова построена двумерная модель взаимодействия типа «хищник – жертва» с учетом внутренней конкуренции на основе данных по Томской области о популяции волков и зайцев. Н.Н. Меркулова провела численное исследование динамики скопления амеб с анализом погрешностей между численными и аналитическими решениями. Метод сплайн-функций к изучению вопросов, связанных с исследованием атмосферы, применяла доцент Н.В. Генина, участвуя в работе, проводимой в содружестве с Институтом оптики атмосферы. Доцент О.П. Федорова изучала применение локальной аппроксимации сплайнами к исследованию датчиков псевдослучайных чисел.

Доцент В.Н. Берцун дал обобщение алгоритма итерационно-интерполяционного метода, исследовал разностные схемы сплайновой интерполяции для решения неодномерных нестационарных краевых задач. Для разрешимости систем ОДУ ИИМ предложил параллельный вычислительный алгоритм. Совместно с О.Л. Крицким применил схемы ИИМ и метод Б.Н. Четверушкина для расчета анизотропной теплопроводности конструкционных элементов.

А.В. Старченко окончил ММФ по специальности «механика» в 1980 г. и аспирантуру в 1983 г. В 1985 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарный сопряженный теплообмен при турбулентном пульсирующем течении жидкости в круглой трубе». В дальнейшем он уделил значительное внимание математическому моделированию изучаемых процессов. Им были разработаны оригинальные вычислительные алгоритмы решения многомерных уравнений Навье–Стокса вязкой жидкости и уравнений механики гетерогенных сред, а также численные модели течения и теплообмена газовзвесей, создана новая комплексная численная модель для исследования горения пылеугольного топлива.

В 1998 г. состоялась защита докторской диссертации А.В. Старченко на тему «Математическое моделирование двухфазных пространственных течений в каналах и камерах сгорания».

Сложные задачи современной науки и техники, такие как расчет прогноза погоды и траекторий космических аппаратов, задачи компьютерной томографии и систем автоматизации проектирования, хранения и передачи информации, систем управления и оптимизации работы энергетических установок, задач массового обслуживания и искусственного интеллекта, привели к необходимости математического моделирования, эффективным средством которого стали современные технологии высокопроизводительных вычислительных систем.

Профессор А.В. Старченко продолжает заниматься созданием параллельных вычислительных алгоритмов решения задач охраны окружающей среды и разработкой информационно-вычислительного комплекса для оперативного контроля за качеством воздуха в городах. Под руководством А.В. Старченко в 2002 г. в университете открыта научная лаборатория высокопроизводительных вычислений.

§ 10

Наряду с научными исследованиями по математике, механике, астрономии на механико-математическом факультете проводилась научно-методическая работа по созданию учебных пособий по общим и специальным курсам лекций и практических занятий. О некоторых изданиях, таких, как книги И.А. Александрова по курсу теории функций комплексного переменного, Р.Н. Щербакова, В.С. Малаховского и А.А. Лучинина по аналитической и дифференциальной геометрии, З.И. Клементьева по математическому анализу и теории функций действительного переменного, было сказано ранее. Назовем еще некоторые работы: «Линейные операторы» И.Х. Беккера, В.А. Романовича; «Автоморфизмы абелевых групп без кручения» и «Упражнения по алгебре» И.Х. Беккера, С.Ф. Кожухова; «Жорданова нормальная форма» И.Х. Беккера, С.К. Росошека; «Механика сплошных сред и экология» А.М. Гришина; «Курс лекций по аэротермохимии» А.М. Гришина, Е.В. Алексеева; «Геометрия векторных полей» В.В. Слухаева; «Вычеты и некоторые их приложения» В.В. Черникова; «Вариационные методы математической физики», «Методы вычислений» и «Алгебраическое операционное исчисление и его приложения» Р.М. Малаховской; «Линейные динамические системы, матричные экспоненты» Б.П. Куфарева, И.Б. Куфаревой; «Современные математические представления сердечно-сосудистой системы» А.М. Бубенчикова, С.Е. Корнелика; «Введение в теорию пространств Банаха» Г.В. Сибирякова; «Введение в проективно-дифференциальную геометрию многообразий, прямых и плоскостей» А.Г. Мизина, Н.П. Чупахина, Н.Р. Щербакова; «Параметрическое представление и оптимальное управление в экстремальных задачах теории отображений» И.А. Александрова, О.И. Александровой, С.А. Копанева, А.Н. Малютиной, В.В. Черникова и другие.

Вопросы методики преподавания математики в университете были предметом обсуждения на методических совещаниях и научных конференциях. Некоторые результаты этой работы опубликованы в сборнике «Избранные главы методики преподавания математики в вузе для слушателей факультета повышения квалификации». Авторами сборника были М.Р. Куваев, В.И. Кан, М.И. Невидимова и Р.С. Поломошнова.

Сотрудники кафедры математического анализа И.А. Александров, С.А. Копанев, Э.Н. Кривякова в 2004 г. создали для студентов первого курса механико-математического факультета интересную книгу «Место математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ», в которой рассказали о значении и содержании курса математического анализа, познакомили с программой и учебным планом, сообщили сведения о кафедре и ее истории. В книгу включили знаменитый доклад Д. Гильберта «Математические проблемы», в котором освещалось состояние математики накануне XX в., и статью П.К. Рашевского «О понятии натурального ряда». Эти статьи призваны вызвать серьезные размышления первокурсников о математике. В 2005 г. вышло расширенное повторное издание этой книги с участием Г.В. Сибирякова. Совершенствование и модернизация преподавания курса математического анализа на ММФ проведена С.А. Копаневым, Г.Г. Пестовым и Г.В. Сибиряковым.

Новой формой привлечения студентов к самостоятельной работе стала предложенная И.А. Александровым система лабораторных работ. Были составлены задания, в основном по темам математического анализа, состоящие из указания задачи и развернутого разъяснения необходимых для доказательства теоремы или формулы для проведения вычислений и составления отчета.

Для студентов-математиков И.А. Александров, А.Н. Малютина, Б.В. Соколов разработали подробные методические указания и задания по курсу «Теория функций комплексного переменного», получившие, как и книга И.А. Александрова «Методы геометрической теории аналитических функций» (2001), гриф УМО университетов по математике и механике.

Систематическую работу по вопросам методики преподавания математики в средней школе и созданию системы подготовки учителей математики в университете ведет З.О. Шварцман. Им разработаны вопросы взаимосвязи классных и внеклассных занятий по математике на основе личного многолетнего опыта преподавания в школе.

Наряду с традиционно высокой математической подготовкой классического университета будущие преподаватели приобретают систему профессиональных знаний и умений для успешной педагогической деятельности. Созданная на механико-математическом факультете специализация по методике преподавания действует более 30 лет, совершенствуясь с учетом новых задач образования. Теперь это специализация «Преподавание математики и информатики». В связи с этим З.О. Шварцманом разработан спецкурс «Школьная информатика», а В.Н. Рудин обратил внимание на организацию факультативных занятий по информатике в школах и подготовку к ней учителей. С.Я. Гриншпон входит в авторский коллектив «Математика, психология, интеллект», создающий серию экспериментальных учебников по математике. Три книги этой серии вышли в издательстве «Просвещение» с грифом УМО.

Работы по методике преподавания математики в средней школе опубликованы в местных, центральных и зарубежных изданиях. За цикл работ «Углубленная математика в школе» в 1992 г. группа сотрудников факультета (С.П. Гулько, В.В. Слухаев, И.А. Печников, Э.Н. Кривякова, С.Я. Гриншпон, Н.А. Исаева, В.Н. Рудин, М.С. Бухтяк) отмечена премией ТГУ. Система подготовки учителей математики в университете признается наиболее приемлемой и оптимальной. В помощь учителям для проведения кружковых занятий в школе З.О. Шварцман опубликовал методические рекомендации на тему «Средние значения на занятиях по математике». Сборник математических текстовых задач для школьников подготовил В.Н. Рудин. Составленный Н.Н. Круликовским «Сборник задач для абитуриентов» в 1963–1973 гг. издавался несколько раз значительным тиражом и получил широкое распространение за пределами Томска.

И.А. Александров издал в 2003 г. популярную книгу «Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения» для учащихся школ, интересующихся математикой и ее приложениями, для организации профильного обучения и факультативных занятий в школе. Книга может рассматриваться как введение к курсу дифференциальных уравнений в высшей школе. Аналогичную цель преследует его книга «Комплексные числа и элементарные функции комплексного переменного», изданная в 2005 г.

Математические олимпиады школьников проводились Томским университетом с 1935 г. Кроме городских, в Томске состоялись пять заочных Сибирских олимпиад, в которых участвовало до тысячи школьников. С 1961 г. предметные олимпиады, прежде всего математические, от школьных до всероссийских и всесоюзных проводились Министерством просвещения. Сотрудники ММФ (Г.А. Бюлер, Н.Н. Круликовский, З.О. Шварцман, В.Н. Рудин, С.П. Гулько, С.Я. Гриншпон и др.) постоянно участвовали в их организации и проведении. О математических олимпиадах в Томске издана брошюра. В течение ряда лет для учащихся старших классов при университете работала летняя, а в течение учебного года – вечерняя физико-математическая школа.

Новой формой работы для повышения интереса к математике и выявления способных и увлекающихся математикой учащихся стало проведение межрегиональных молодежных конференций студентов и школьников «Математика: ее содержание, методы и значение» и «Математические методы в естествознании». В конференциях принимали участие школьники и студенты из Томска, Томской, Кемеровской, Тюменской областей. По темам конференции участники представляли письменные работы, в которых заметен интерес к математике, увлеченность, желание проявить свои способности. Самые серьезные работы являются примером первых шагов в науку. По результатам конференций были изданы сборники избранных докладов. Инициаторами и председателями оргкомитетов конференций были И.А. Александров, А.М. Гришин, С.П. Гулько.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутягин А.С., Салтанов Ю.А.* Университетское образование в СССР. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1957.
2. *История* отечественной математики: В 4 т. Киев: Наукова думка, 1968–1979.
3. *Гнеденко Б.В., Погребысский, Штокало И.З., Юшкевич А.П.* О проблемах истории математики в России и СССР и о работах в этой области за 1956–1961 гг. // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1963. Вып. 15. С. 11–36.
4. *Юшкевич А.П.* Математика и механика в Академии наук // История Академии наук СССР. 1958. Т. 1. С. 70–84, 187–195, 341–352.
5. *Делоне Б.Н., Кудрявцев Л.Д., Постников М.М.* Очерк истории развития математики в Академии наук СССР за советский период (1917–1960) // Очерки истории математики и механики: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 3–44.
6. *Александров П.С., Головин О.Н.* Московское математическое общество // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, вып. 6. С. 9–46.
7. *Майстров Л.Е.* Возникновение Московского математического общества // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14, вып. 3. С. 227–234.
8. *Депман И.Я.* Санкт-петербургское математическое общество // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Вып. 13. С. 11–106.
9. *Марчевский М.Н.* Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879–1954) // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Вып. 9. С. 613–666.
10. *Рогаченко В.Ф.* Математика в Львовском научном обществе им. Т.Г. Шевченко // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 56–61.
11. *Юшкевич А.П.* Математика в Московском университете за первые сто лет его существования // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1948. Вып. 1. С. 43–140.
12. *Выгодский М.Я.* Математика и ее деятели в Московском университете во второй половине XIX в. // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1948. Вып. 1. С. 141–183.
13. *Александров П.С., Гнеденко Б.В., Степанов В.В.* Математика в Московском университете в XX в. (до 1940 г.) // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1948. Вып. 1. С. 9–42.
14. *Александров П.С.* Математика в Московском университете в первой половине XX века // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1955. Вып. 8. С. 9–54.
15. *Лихолетов И.И., Яновская С.А.* Из истории преподавания математики в Московском университете (1804–1860 гг.) // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1955. Вып. 8. С. 127–480.
16. *Гагаев Б.М., Морозов В.В., Норден А.П.* Казанская математическая школа за 30 лет // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3, вып. 2. С. 3–20.
17. *Гагаев Б.М.* Развитие математического анализа в Казанском университете // Учен. зап. Казан. ун-та. 1960. Т. 120, кн. 7. С. 67–86.

18. *Лаптев Б.Л.* Математика в Казанском университете в советский период // Учен. зап. Казан. ун-та. 1960. Т. 120, кн. 7. С. 24–66.
19. *Лаптев Б.Л.* Математика в Казанском университете за 40 лет (1917–1957) // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Вып. 12. С. 11–58.
20. *Марчевский М.Н.* История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования // Учен. зап. Казан. ун-та. 1956. Т. 65. С. 7–29.
21. *Ряго Г.* Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета (Очерк) // Учен. зап. Тарт. ун-та. 1955. Т. 37.
22. *Депман И.Я.* Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете // Учен. зап. Ленингр. педин-та. 1955. Т. 14. С. 128–137.
23. *Киро С.Н.* Математика в Одесском (Новороссийском) университете (укр.) // Историко-матем. зб. 1961. Т. 2. С. 2–42.
24. *Белозеров С.Е.* Математика в Ростовском университете // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1953. Вып. 6. С. 247–352.
25. *Галченкова Р.И.* Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIX в. // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Вып. 14. С. 355–392.
26. *Жемайтис З.Ю.* Физико-математические науки в Вильнюсском университете // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 77.
27. *Беспамятных Н.Д.* К истории преподавания математики в Вильнюсском университете // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 77–78.
28. *Чайковский Н.А.* Математика в Львовском университете с момента его возникновения (1661) до 1918 г. // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 55–56.
29. *Добровольский В.А.* Алгебраическая тематика в работах киевских математиков (из истории математики в Киевском университете до 1917 г.) (укр.) // Историко-матем. зб. 1961. Т. 2. С. 57–67.
30. *Грацианская Л.Н., Штокало И.З.* История развития математики в Киевском университете // История Киевского университета (укр.): Сб. ст. 1959. Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1959.
31. *Добровольский В.А.* Математика в Киевском политехническом институте за 50 лет (1898–1948) // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 61–65.
32. *Журавский А.М.* Математика и механика в «Записках Ленинградского горного института» // Зап. Ленингр. горн. ин-та. 1959. Т. 40. С. 41–46.
33. *Искандеров Е.И., Сабиров М.С.* Математические исследования Узбекского государственного университета // Труды Узб. ун-та. 1957. Вып. 76. С. 101–124.
34. *Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б.* О развитии математики на Украине // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Вып. 9. С. 403–426.
35. *Штокало И.З.* Очерк развития математики на Украине за 40 лет Советской власти (укр.). Киев, 1958.
36. *Халилов З.И.* Развитие физико-математических наук в Советском Азербайджане // Изв. АН АзССР. 1957. № 10. С. 25–38.
37. *Гусейнов Е.И.* Развитие математики в Азербайджане // Учен. зап. Азерб. ун-та. 1957. № 10. С. 239–261.
38. *Жаутыков О.А.* Математика в Казахстане за советские годы // Труды сектора матем. и мех. АН Каз. ССР. 1958. Т. 5–24.

39. *Лусис А.Я.* Развитие математики в Советской Латвии за последнее десятилетие // Учен. зап. Латв. ун-та. 1958. Т. 20. С. 5–20.
40. *Лысенко В.И.* Из истории первой петербургской математической школы // Труды ин-та истории естествознания и техники АН СССР. 1961. Т. 43. С. 182–205.
41. *Математика* в СССР за тридцать лет (1917–1947). М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
42. *Математика* в СССР за сорок лет (1917–1957). Т. 1: Обзорные статьи; Т. 2: Библиография. М.: Физматиздат, 1959.
43. *Математика* в СССР (1958–1967). Т. 2: Библиография. М.: Наука, 1969–1970.
44. *Томский университет*. 1880–1980. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980. С. 432.
45. Профессора Томского университета: Биографический словарь. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1996–2003. Т. 1–4.
46. *Томский технологический институт* за 25 лет. Томск: Изд-во Том. техн. ин-та, 1925.
47. *Зайченко П.А.* Томский государственный университет имени В.В. Куйбышева. Очерки по истории первого сибирского университета за 75 лет (1880–1955). Томск: Изд-во Том. ун-та, 1960.
48. *Труды* ученых в изданиях Томского университета (1889–1958). Томск: Изд-во Том. ун-та, 1962.
49. *Обзор* научной деятельности Томского университета: за 1959 г. (Томск, 1960); за 1960 г. (Томск, 1961); за 1961 г. (Томск, 1962); за 1962 г. (Томск, 1963); за 1963 г. (Томск, 1964); за 1964 г. (Томск, 1965).
50. *Библиография* диссертаций, защищенных в Томском государственном университете им. В.В. Куйбышева за 1935–1952 гг. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1955.
51. *Известия* Томского университета. 1924–1928. Т. 74, 75, 79.
52. *Ученые записки* Томского университета. 1946–1966. Т. 1, 5, 6, 8, 11, 14, 17, 25, 28, 32, 36, 44, 49, 68.
53. *Труды* Томского университета. 1959–1966. Т. 144, 155, 160, 161, 168, 169, 175, 176, 179, 181, 182.
54. *Известия* НИИ математики и механики Томского университета. 1935–1946. Т. I–III.
55. *Труды* НИИ математики и механики Томского университета. 1940. Т. 1.
56. *Труды* Сибирского физико-технического института при Томском университете. 1948–1950. Вып. 26, 27, 30.
57. *Известия* Томского технологического института. 1911–1914. Т. 24, 29, 35.
58. *Известия* Томского политехнического института. 1936–1965. Т. 55, 59, 62, 67, 93, 104, 110, 118, 119, 125, 131.
59. *Труды* Томского электромеханического института инженеров железнодорожного транспорта. 1956. Т. 1.
60. *Сборник* научных трудов Томского инженерно-строительного института. 1956. Т. 1.
61. *Ученые записки* Томского педагогического института. 1940–1964. Вып. 1, 4, 6, 8–11, 15, 22.
62. *Доклады* VII научной конференции, посвященной 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Томск, 1957. Вып. 2.
63. *Доклады* научной конференции по теоретическим и прикладным вопросам математики и механики. Томск, 1960.
64. *Доклады* Второй Сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1962.
65. *Доклады* Третьей Сибирской конференции по математике и механике. Томск, 1964.
66. *Сборник* тезисов докладов Первой научной сессии вузов, объединенных Западно-Сибирским советом по координации научно-исследовательской работы (19–23 февраля 1963 г.). Томск, 1963. Вып. 1.

67. *Труды* II Всесоюзного математического съезда. Л., 1935. Т. 1, 2.
68. *Доклады* VI научной конференции Новокузнецкого педагогического института по физико-математическим наукам. Новокузнецк, 1963.
69. *Первая* Всесоюзная геометрическая конференция: Тезисы и аннотации докладов и кратких сообщений. Киев, 1962.
70. *Тезисы* докладов Второй Всесоюзной геометрической конференции. Харьков, 1964.
71. *Материалы* II Прибалтийской геометрической конференции по вопросам дифференциальной геометрии. Тарту, 1965.
72. *Физико-математический* реферативный журнал. 1939–1941. Т. I–VI.
73. *Реферативный журнал*. Математика. 1953–1966.
74. *Реферативный журнал*. Механика. 1953–1966.
75. *Математика* и механика в изданиях Академии наук СССР. Библиография Т. 1 (1728–1935); Т. 2 (1936–1947); Т. 3 (1948–1952).
76. *История* естествознания. Библиографический указатель. Т. 1 (1917–1947); Т. 2 (1948–1950); Т. 3 (1951–1958).
77. *Историческая записка* об учреждении и открытии Томского технологического института. Томск, 1902.
78. *Суворов Г.Д.* Павел Парфеньевич Куфарев (к пятидесятилетию со дня рождения) // Труды Том. ун-та. 1959. Т. 144. С. 149–155.
79. *Сарымсаков Т.А., Линник Ю.В.* Николай Павлович Романов (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12, вып. 3.
80. *Гуссов В.В.* Работы русских ученых по теории гамма-функций // Историко-матем. исследования: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Вып. 5. С. 421–472.
81. *Медведев Ф.А.* Первые руководства по теории множеств // Труды ин-та истории естествознания и техники АН СССР. 1959. Т. 28. С. 237–249.
82. *Медведев Ф.А.* Подготовка теоретико-множественных и теоретико-функциональных исследований в России // Очерки истории математики и механики: Сб. ст. М.: Изд-во АН СССР, 1963. С. 45–66.
83. *Медведев Ф.А.* Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965.
84. *Бергман С.Б.* О программе научной работы по теории аналитических функций института математики и механики Томского государственного университета им. В.В. Куйбышева // Успехи матем. наук. 1936. Вып. 1. С. 278–283.
85. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesimgen iiber continuierliche Gruppenmit geometrischen Anwendungen. Leipzig, 1893.
86. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, 1893.
87. *Speiser A.* Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Leipzig, 1893.
88. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
89. *Wey1 G.* Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig, 1931.
90. *Канунов Н.Ф.* Фробениус и Молин // Учен. зап. Кабард.-Балк. ун-та. 1963. Т. 19. С. 155–157.
91. *Канунов Н.Ф. Вклад Ф.Э.* Молина в теорию представлений алгебр и групп конечного порядка // Тез. Междунар. конгр. матем. Секция 15. М.: Наука, 1966.
92. *Канунов Н.Ф.* Федор Эдуардович Молин. М.: Наука, 1983. С. 110.
93. *Агапова К.Ф.* Научно-педагогическая деятельность Ф.Э. Молина в Томске // Вопросы истории физико-математических наук: Матер. конф. М.: Высшая школа, 1963. С. 158.
94. *Беломестных В.Н., Беломестных Л.А.* Физико-математическое образование в высшей технической школе Сибири. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2000. С. 176.

95. *Научно-исследовательский* институт прикладной математики и механики. 1968–1993. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1993. С. 176.
96. *Круликовский Н.Н.* Об изучении научного наследства и архива Ф.Э. Молина // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 163. С. 3–5.
97. *Круликовский Н.Н.* О подготовке издания сборника научных трудов Ф.Э. Молина // Тез. докл. и сообщений на межвуз. конф. по истории физ.-мат. наук, 25 мая – 2 июня 1960 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.
98. *Круликовский Н.Н.* О рукописных материалах научного архива Ф.Э. Молина // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. С. 390–391.
99. *Круликовский Н.Н.* Из истории математики в Томске (Развитие математики в Томском университете. 1917–1941 гг.) // Доклад на межвуз. конф. по истории физ.-мат. наук. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.
100. *Круликовский Н.Н.* Наш земляк академик Н.Н. Лузин // Томская старина. 1992. № 3.
101. *Тезисы* докладов Международной конференции по математике и механике, 16–18 сентября 2003 года. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2003.
102. *Исследования* по математическому анализу и алгебре. Вып. 1–3. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998–2003.
103. *Куфарев П.П.* Некоторые методы и результаты теории однолистных функций // Труды 3-го Всесоюз. матем. съезда. 1956. Т. 2. С. 29–31.
104. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории аналитических функций. М.: Наука, 1976. С. 344.
105. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. С. 220.
106. *Аравийская Е.Н., Невидимова М.И., Исакова В.В. и др.* Аналитические исследования и вопросы аппроксимации функций двух комплексных переменных // Сб. тез. докл. первой науч. сессии вузов, объединенных Зап.-сиб. советом по координации науч.-исслед. работы (19–23 февраля 1963 г.). 1963. Вып. 1. С. 39–40.
107. *Александров И.А., Генина Н.В., Куфарев П.П., Черников В.В.* Работа Томского университета по теории однолистных функций // Сб. тез. докл. первой науч. сессии вузов, объединенных Зап.-сиб. советом по координации науч.-исслед. работы (19–23 февраля 1963 г.). 1963. Вып. 1. С. 44–46.
108. *Завьялов Ю.С., Кузнецов Б.Г.* Вариационные принципы механики сплошных сред и канонические преобразования // Сб. тез. докл. первой науч. сессии вузов, объединенных Зап.-сиб. советом по координации науч.-исслед. работы (19–23 февраля 1963 г.). 1963. Вып. 1. С. 49–50.
109. *Суворов Г.Д.* Общие свойства топологических отображений областей с переменными границами // Сб. тез. докл. первой науч. сессии вузов, объединенных Зап.-сиб. советом по координации науч.-исслед. работы (19–23 февраля 1963 г.). 1963. Вып. 1. С. 57–58.
110. *Щербаков Р.Н., Малаховский В.С., Ивлев Е.Т.* Применение современных дифференциально-геометрических методов к исследованию геометрических образов трехмерного пространства // Сб. тез. докл. первой науч. сессии вузов, объединенных Зап.-сиб. советом по координации науч.-исслед. работы (19–23 февраля 1963 г.). 1963. Вып. 1. С. 62–64.
111. *Александров И.А.* Функционалы на классах однолистных функций // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 1–4.

112. *Малаховский В.С.* Многообразия алгебраических фигур в *n*-мерном однородном пространстве // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 8–10.
113. *Назаров Г.И.* Методы линейных операторов в магнитной газодинамике // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 10–14.
114. *Суворов Г.Д.* Метрические свойства плоских и пространственных отображений в замкнутых областях // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 15–18.
115. *Щербаков Р.Н., Ивлев Е.Т.* Исследования томских геометров по линейчатой дифференциальной геометрии // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 18–20.

Список научных трудов Ф.Э. Молина

116. *Bahn des Kometen* 1880 III // Astronomische Nachrichten. 1883. Vol. 2519. P. 353–362.
117. *Zusatz zur Bahnbestimmung* des Kometen 1880 III in A.N. 2519 // Astronomische Nachrichten. 1883. Vol. 2528.
119. *Ueber line*are Transformation der elliptischen Funktion. Dorpat, 1885. P. 24.
120. *Ueber Systeme* hoherer complexer Zahlen // Mathematische Annalen. 1892. Vol. 41. P. 83–156.
121. *Berichtigung* zu dem Aufsatze «Ueber Systeme hoherer complexer Zahlen» // Mathematische Annalen. 1893. Vol. 42. P. 308–312.
122. *Eine Bemerkung* zur Theorie der homogenen Substitutionsgruppen // Sitzungsberichten der Naturforscher Gesellschaft bei der Universitat Jurjew. Jahrgang 18. P. 259–274.
123. *Ueber die Anzahl* der Variabeln einer irreductibelen Substitutionsgruppe // Sitzungsberichten der Naturforscher Gesellschaft bei der Universitat Jurjew. Jahrgang 18. P. 277–288.
124. *Ueber die Invarianten* der linearen Substitutionsgruppen // Sitzungsberichte der konig. Preuss. Akademie der Wissenschaft zu Berlin. LII. 1897. P. 1152–1156.
125. *Ueber gewisse* transzendente Gleichungen // Mathematische Annalen. 1930. Vol. 103. P. 35–37.
126. *Losungen der Aufgabe* 148 // Jahresbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung. 1934. Vol. 44. P. 55–56.
127. *Системы* высших комплексных чисел с одной главной единицей // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1936. Т. 1, вып. 1. С. 217–224.
128. *Об одном преобразовании* гипергеометрической строки // Учен. зап. пед. ин-та. 1939. Вып. 1. С. 119–121.
128 а. *Числовые системы*. Новосибирск: Наука, 1985. С. 125.

Список научных трудов В.Л. Некрасова

129. *О второй вариации*. Казань, 1889. С. 3–21.
130. *К теории* функций действительной переменной // Дневник X съезда естествоиспытателей и врачей. 1898. С. 427.
131. *Строение* и мера линейных точечных областей. Томск, 1907.
132. *Адхеренции* и кохеренции линейной точечной области // Изв. Том. технол. ин-та. 1908. Т. 11, № 3. С. 1–9.
133. *Построение* треугольников на сфере // Изв. Том. технол. ин-та. 1911. Т. 24. С. 1–19.
134. *Об одном* свойстве родственных определителей // Изв. Том. технол. ин-та. 1913. Т. 32. С. 1–2.

135. *Определение* фокусов и директрис кривой второго порядка по общему ее уравнению. Томск, 1916.
136. *Основания* сферической тригонометрии. Ч. 1: Теория. Томск, 1912.

Курсы лекций В.Л. Некрасова

137. *Теоретическая* механика. Литогр. Томск, 1901.
138. *Дифференциальное* исчисление. Томск, 1901, 1906.
139. *Аналитическая* геометрия. Литогр. Томск, 1914, 1902–1903, 1904.
140. *Курс* аналитической геометрии. Томск, 1905, 1909. Ч. 1.
141. *Курс* аналитической геометрии. Литогр. Томск, 1909, 1917. Ч. 2.
142. *Дифференциальное* исчисление (Функции многих переменных, геометрические приложения). Томск, 1904.
143. *Интегральное* исчисление (Определенные интегралы, ректификация кривых). Литогр. Томск, 1901.
144. *Интегральное* исчисление (Приближенное вычисление интегралов). Томск, 1904.
145. *Александров И.А.* Области значений функционалов в классе функций, однолистных и регулярных в круге // Докл. VI науч. конф. Том. ун-та. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1957. С. 18–19.
146. *Александров И.А.* О границах выпуклости и звездообразности для функций однолистных и регулярных в круге // Докл. АН СССР. 1957. Т. 116. С. 900–905.
147. *Александров И.А.* Граничные значения функционала $I = I(f, \bar{f}, f', \bar{f}')$ на классе голоморфных однолистных в круге функций // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4, № 1. С. 17–31.
148. *Александров И.А.* Геометрические свойства однолистных функций // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 175. С. 29–38.
149. *Александров И.А.* Области значений систем функционалов // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 82. С. 59–70.
150. *Александров И.А.* Вариационные формулы для однолистных функций в двусвязных областях // Сиб. матем. ж. 1963. Т. 4, № 5. С. 961–975.
151. *Александров И.А.* Мажорантные области для функционалов на семействах голоморфных функций многих комплексных переменных // Сиб. матем. ж. 1966. Т. 7, № 6.
152. *Аравийская Е.Н.* К вопросу о геодезическом изображении поверхностей // Изв. Том. ун-та. 1924. Т. 74. С. 80–83.
153. *Аравийская Е.Н.* О свойствах интегралов дифференциальных уравнений, интегрирующихся в квадратурах // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 90–97.
154. *Аравийская Е.Н.* Ueber ein Verfahren Orthogonalfunktionen-systemen zweier komplexen Veranderlichen // Матем. сб. 1937. Т. 2, вып. 4. С. 665.
155. *Аравийская Е.Н.* О приближенном представлении функций двух комплексных переменных в областях, конвексных относительно некоторых классов функций // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 37–42.
156. *Аравийская Е.Н.* К теории роста функций с заданными нуль-поверхностями // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 61–71.
157. *Бакланов М.В., Суворов Г.Д.* О замкнутости некоторых классов отображений относительно равномерной сходимости // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 182. С. 3–14.

158. *Бакланов М.В., Суворов Г.Д.* Искажение относительных расстояний в замкнутых областях при топологических отображениях класса BL в конформно инвариантной метрике // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 182. С. 15–26.
159. *Бергман С.Б.* Zur Theorie von pseudokonformen Abbildungen // Матем. сб. 1936. Т. 1, вып. 1. С. 79–96.
160. *Бергман С.Б.* О функциях, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям в частных производных // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15, № 5. С. 227–230.
161. *Бергман С.Б.* Zur Theorie der linearen Integral und Funktionalgleichungen im complexen Gebiet // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 242–257.
162. *Богословская Л.С.* О системе минимальных поверхностей // Изв. Том. ун-та. 1924. Т. 74. С. 90–94.
163. *Бродский Г.А., Привалов И.И.* О предельных значениях интеграла типа Коши–Стильтьеса // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 49–52.
164. *Булат П.М.* Об асимптотических оценках средних значений основной функции аддитивной теории чисел // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 104–110.
165. *Бюлер Г.А.* О некоторых вопросах теории функций двух комплексных переменных, мероморфных в единичном бицилиндре // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 164–186.
166. *Бюлер Г.А.* Об интегральном представлении функций Матье // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 191–197.
167. *Бюлер Г.А.* Цилиндрический проводник произвольного сечения в плоском периодическом поле // Уч. зап. Том. ун-та. 1955. Т. 25. С. 122–134.
168. *Бюлер Г.А.* Методика решения третьей краевой задачи теплопроводности для слоистых тел простейшей формы // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. С. 252–254.
169. *Вишневский Л.А., Крылов Н.М.* О приложении одной теоремы C. Arzela к обобщению критерия Bendickson'a, касающегося равномерной сходимости последовательности функций // Изв. Киев. ун-та. 1928. Т. 34. С. 1–10.
170. *Вишневский Л.А.* О некоторых вопросах теории функций бесконечного числа переменных // Зап. матем. кабинета Крым. ун-та. 1919. Т. 1. С. 65–126.
171. *Вишневский Л.А., Крылов Н.М.* Sur l'extremum absoludans le probleme simple du calcul de variations // Зап. матем. кабинета Крым. ун-та. 1921. Т. 2. С. 209–214.
172. *Вишневский Л.А.* Sur l'application d'analyse de fonctions a une infinite des variables aux problemes d'extremum // Зап. матем. кабинета Крым. ун-та. 1921. Т. 2. С. 215–218.
173. *Вишневский Л.А.* Ueber eine System linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten // Зап. матем. кабинета Крым. ун-та. 1921. Т. 3. С. 85–88.
174. *Вишневский Л.А.* Ueber eine Minimalaufgabe von Tschebychew // Зап. матем. кабинета Крым. ун-та. 1921. Т. 2. С. 253–258.
175. *Вишневский Л.А.* Метрическая система мер. М.: ГИЗ, 1925.
176. *Гомелля С.П.* К вопросу о построении проекции взаимных пересечений поверхностей вращения второго порядка // Изв. Том. технол. ин-та. 1911.
177. *Горохов М.С.* Связь графического метода интегрирования с численным // Труды НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1940. Т. 1. С. 138–140.
178. *Горячев Н.Н.* Способ подыскания Певцовских пар звезд (с каталогами их для Томской обсерватории) // Изв. Том. ун-та. 1924. Т. 74. С. 48–69.
179. *Горячев Н.Н.* Заметка об уравнениях Якоби // Изв. Том. ун-та. 1928. Т. 79, вып. 2. С. 82–84.

180. *Горячев Н.Н.* Способ последовательных приближений при уравновешении свободной цепи геодезических четырехугольников // Труды Том. ун-та. 1934. Т. 86. С. 107–128.
181. *Горячев Н.Н.* Способ Halphen'а для вычисления вековых возмущений планет и применение его к Церере. Томск, 1937.
182. *Джанумянц А.С.* Интеграл Стильтьеса и криволинейный интеграл по неспрямляемой кривой Жордана // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 119–163.
183. *Долговых В.П.* О некоторых геометрических объектах векторного поля // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 176, вып. 4. С. 112–116.
184. *Долговых В.П.* К геометрии векторного поля // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 181, вып. 5. С. 76–82.
185. *Ермолаев Л.С.* Дифференциальная геометрия векторного поля, комплекс прямых, определяемых полем // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 111–124.
186. *Заранкевич К.* Zur localen Zerschneidung des Raumes // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 155–159.
187. *Иванов М.Н.* О малых колебаниях материальной системы около положения равновесия. Томск, 1916.
188. *Ивлев Е.Т.* О реперах подмногообразий в теории пар комплексов в P_3 // Доклады АН СССР. 1961. Т. 139, вып. 3. С. 538–540.
189. *Казачков Б.В.* О теоремах типа Силова для бесконечных групп // Учен. зап. пед. ин-та. 1951. Вып. 8. С. 233–238.
190. *Казачков Б.В.* О теоремах типа Силова // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. С. 5–7.
191. *Казачков Б.В.* О некоторых условиях факторизуемости периодических групп // Учен. зап. пед. ин-та. 1956. Вып. 15. С. 452–457.
192. *Клементьев З.И.* Об одном продолжении линейных функционалов в полуупорядоченных пространствах // Учен. зап. Том. ун-та. 1947. Т. 5. С. 47–52.
193. *Клементьев З.И.* О полуупорядоченных пространствах аддитивных функций // Учен. зап. Том. ун-та. 1950. Т. 14. С. 9–17.
194. *Клементьев З.И.* К теории меры со значениями в булевой алгебре // Труды Том. ун-та. 1961. Т. 155. С. 42–55.
195. *Кованько А.С.* Sur quelques modes de convergence des suite de fonction a une variable reelle sur $(-\infty; +\infty)$ // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 148–154.
196. *Кованько А.С.* Взаимоотношения различных обобщений почти периодических функций // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 1–36.
197. *Козырев И.И.* О решении некоторых задач Дирихле для двусвязных полигональных областей // Учен. зап. Том. ун-та. 1955. Т. 25. С. 35–39.
198. *Кошляков Н.С.* Об одной предельной формуле Кронекера в теории квадратичного поля // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 237–241.
198 а. *Круликовский Н.Н.* История развития спектральной теории дифференциальных операторов // Труды XIII Междунар. конгр. по истории науки. Секция V. М.: Наука, 1974. С. 128–131.
199. *Куфарев Б.П.* Метризация пространства областей // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 169. С. 3–7.
200. *Куфарев Б.П.* Элементарное доказательство основной леммы теории простых концов последовательностей областей, сходящихся к ядру // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 175. С. 3–4.
201. *Куфарев П.П.* О минимальной области для двухсвязных областей // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 228–236.

202. *Куфарев П.П.* Об одном свойстве ядровой функции области // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 72–74.
203. *Куфарев П.П.* К вопросу о поведении отображающей функции на границе // Изв. НИИ матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 37–60.
204. *Куфарев П.П.* Об одном частном случае колебаний винтовой пружины со сталкиванием витков // Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12, вып. 2.
205. *Куфарев П.П.* Об однопараметрических семействах аналитических функций // Матем. сб. 1943. Т. 13, вып. 55. С. 87–88.
206. *Куфарев П.П., Фалес А.Э.* Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. С. 995–998.
207. *Куфарев П.П., Куваев М.Р.* Об уравнении типа Лёвнера для многосвязных областей // Учен. зап. Том. ун-та. 1955. Т. 25. С. 19–34.
208. *Куфарев П.П., Семухина Н.В.* Об одной задаче Н.Н. Лузина // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9, вып. 4. С. 183–185.
209. *Куфарев П.П., Астафьев П.П., Болецкий К.О.* Решение некоторых задач о перемещении контура нефтеносности // Учен. зап. Том. ун-та. 1952. Т. 17.
210. *Лагунов В.Н.* Бесконечно дифференцируемая функция, линии уровня которой в окрестности изолированного минимума не звездообразны // Сб. науч. трудов инж.-стр. ин-та. 1956. Т. 1. С. 124–130.
211. *Лучинин А.А.* Некоторые вопросы эквиаффинной дифференциальной геометрии четырехпараметрического векторного поля // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1964. С. 196–197.
212. *Малаховский В.С.* Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 168, вып. 3. С. 28–42.
213. *Малаховский В.С.* Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 168, вып. 3. С. 43–53.
214. *Малаховский В.С.* Комплексы кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 176, вып 4. С. 28–36.
215. *Малаховский В.С.* О многообразиях алгебраических фигур // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 181, вып. 5. С. 5–14.
216. *Малеев В.А.* К теории уравнений 3-й степени // Изв. Том. ун-та. 1924. Т. 74. С. 73–79.
217. *Малеев В.А.* О группах решений сравнения $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^n y^n z^n=0$ по модулю, представляющему степень простого делителя выражений: x^2-yz, y^2-xz, z^2-xy // Изв. Каз. физ.-мат. об-ва. 1927. Т. 2, сер. 3. С. 36–40.
218. Малеев В.А. О свойствах системы чисел, удовлетворяющих сравнению $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^n y^n z^n \equiv 0$ (mod q^{kn}) // Изв. Каз. физ.-мат. об-ва. 1927. Т. 2, сер. 3. С. 21–35.
219. *Малеев В.А.* О композициях решений сравнения $x^{3n}+y^{3n}+z^{3n}-3x^n y^n z^n \equiv 0$ (mod q^{kn}) // Изв. Том. ун-та. 1928. Т. 79, вып. 2. С. 103–113.

220. *Малеев В.А., Архангельский А.П.* Об определении наименьшего показателя *w*, при котором выражение делится нацело на многочлен $F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ по простому модулю *p* // Изв. Том. индустр. ин-та. 1936. Т. 55, вып. 1. С. 43–48.
221. *Малеев В.А., Чистяков Ю.В.* О вычислении производных сумм одинаковых степеней корней по коэффициентам уравнения // Изв. Том. индустр. ин-та. 1936. Т. 55, вып. 1. С. 37–42.
222. *Малеев В.А.* О последней теореме Fermat'а // Изв. Каз. физ.-матем. об-ва. 1937. Т. 2, сер. 3. С. 36–40.
223. *Митрохин И.М.* Об изменении кривизны гиперповерхностей при псевдоконформных отображениях // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1936. Т. 1. С. 267–280.
224. *Минятов А.К.* Сравнительное исследование дифференциальных и разностных уравнений // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 1–22.
225. *Минятов А.К.* О построении интерполяционных формул // Матем. сб. 1932. Т. 39. С. 15–65.
226. *Минятов А.К.* Об одной теореме, касающейся приближенных вычислений определенных интегралов // Матем. сб. 1934. Т. 41. С. 349–353.
227. *Нётер Ф.* О рекуррентных формулах функций Бесселя и Эрмита // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 120–135.
228. *Нётер Ф.* Асимптотические формулы и геометрическая оптика // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 153. С. 175–189.
229. *Овчинников И.С.* Метрические свойства отображений класса BL^2 // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161, № 3. С. 526–529.
230. *Оранская Н.В.* Интегрирование уравнения de Sparre // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 187–191.
231. *Попова Н.В.* Об отображениях, осуществляемых интегралами одного класса дифференциальных уравнений // Учен. зап. Том. ун-та. 1950. Т. 14. С. 49–69.
232. *Привалов И.И.* Современные проблемы теории функций комплексного переменного // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 107–119.
233. *Привалов И.И.* Обобщение метода Линделефа // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 126–143.
234. *Рашевский П.К.* О равновесии упругих тел с винтовой симметрией // Матем. сб. 1944. Т. 15. С. 55–70.
235. *Романов Н.П.* Ueber die additiven Eigenschaften der allgemeinen Zahlenfolgen // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 190–204.
236. *Романов Н.П.* Определение среднего квадратичного основной функции аддитивной теории чисел // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 1. С. 13–37.
237. *Романов Н.П.* Пространство Гильберта и теория чисел // Изв. АН СССР. 1946. Т. 10. С. 3–34.
238. *Романов Н.П.* Об определении среднеарифметических высшего порядка от основной функции аддитивной теории чисел // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 145–173.
239. *Савелов А.А.* Аффинные преобразования. Томск, 1937.
240. *Савелов А.А.* Замечательные кривые. Томск, 1938.
241. *Селиванов Н.А.* О цепях сегментов Lebesgue'а // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 1. С. 63–66.

242. *Селиванов Н.А.* Доказательство одной теоремы Denjoy о производных функциях // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 29–31.
243. *Селиванов Н.А.* О производных функциях // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 125–127.
244. *Серпинский В.* Об одной общей двойной последовательности (франц.) // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 225–227.
245. *Слухаев В.В.* Некоторые вопросы эквиаффинной геометрии векторного поля // Труды Том. ун-та. 1965. Т. 181, вып. 5 С. 68–75.
246. *Слухаев В.В.* Аффинно-симметрические векторные поля // Сиб. матем. ж. 1965. Т. 6, № 4. С. 924–933.
247. *Слухаев В.В.* Эквиаффинная геометрия двойного поля и ее приложения к теории установившегося течения жидкости // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, вып. 3.
248. *Соколова В.А.* Определение вещественных минимальных поверхностей переноса и изучение линий переноса // Изв. Том. ун-та. 1924. Т. 74. С. 84–89.
249. *Соколова В.А.* Аффинные преобразования минимальных поверхностей // Изв. Том. ун-та. 1928. Т. 79, вып. 2. С. 148–149.
250. *Соколова В.А.* Изгибание минимальной поверхности переноса // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 160–167.
251. *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.
252. *Суворов Г.Д.* Принцип длины и площади для внутренних Q-квазиконформных отображений // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 169. С. 18–23.
253. *Суворов Г.Д.* О равномерной сходимости последовательности простых топологических отображений класса BL_k // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 175. С. 12–22.
254. *Суворов Г.Д.* Об искажении расстояний при однолистных отображениях замкнутых односвязных областей // Матем. сб. 1958. Т. 45, вып. 2. С. 154–180.
255. *Суворов Г.Д., Кузик Г.А.* Элементарные конформные отображения, осуществляемые решениями простейших дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. Второй Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1962. С. 32.
256. *Суворов Г.Д.* О роли разных форм обучения в стимулировании научного творчества // Вопросы воспитания и преподавания в университете: Сб. ст. Л., 1964. С. 119–127.
257. *Темляков А.А.* Особое интегральное уравнение типа Volterua // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1953. Т. 1, вып. 1. С. 23–33.
258. *Темляков А.А.* Существование особых решений нелинейных интегральных уравнений вида $\varphi(x) = \int_a K(x,s) f(s, \varphi(s))ds$ // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 39–44.
259. Темляков А.А. О нелинейном интегральном уравнении типа $\int_a^b F(x, s, \varphi(s))ds = f(x)$ // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 22, вып. 1. С. 83–98.
260. *Темляков А.А.* Zu dem Wachstumsproblem der harmonischen Funktion des dreidimensionalen Raumes // Матем. сб. 1935. Т. 42. С. 707–718.
261. *Темляков А.А.* Sur la croissance des fonctions satisfaisant aux equatians aux derivees partielles lineaires et du second ordre // C. r. Acad. sci. 1935. Vol. 200. P. 799–801.

262. *Темляков А.А.* Ueber harmonische Funktionen von drei Veran-derlichen mit einer meromorphen zugehorigen Funktion // Матем. сб. 1939. Т. 5. С. 487–496.
263. *Томилов Е.Д.* О статической теории винтовых пружин большой мощности // Учен. зап. Том. ун-та. 1948. Т. 11. С. 153–167.
264. *Трофимов П.И.* Транзитивно-коммутативные группы // Учен. зап. Том. ун-та. 1947. Т. 6. С. 110–116.
265. *Трофимов П.И.* О конечных нильпотентных группах с заданным числом неинвариантных подгрупп // Учен. зап. Том. ун-та. 1955. Т. 25. С. 40–42.
266. *Туганов Н.Г.* О линиях на поверхности, геодезическое кручение и нормальная кривизна которых связаны линейным соотношением // Докл. АН СССР. 1938. Т. 20. С. 515–516.
267. *Туганов Н.Г.* О поверхностях, конформно изображающихся посредством нормалей на одну полость своей поверхности центров // Докл. АН СССР. 1941. Т. 33. С. 109–111.
268. *Туганов Н.Г.* О конгруэнции линий второго порядка в трехмерном проективном пространстве // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100. С. 13–15.
269. *Федорова В.С.* Об обобщенном уравнении Лёвнера // Учен. зап. пед. ин-та. 1947. Вып. 4. С. 19–24.
270. *Федорова В.С.* Об одном частном виде уравнения // Учен. зап. пед. ин-та. 1950. Вып. 6. С. 63–72.
271. *Фет А.И., Люстерник Л.А.* Вариационные задачи на замкнутых многообразиях // Докл. АН СССР. 1951. Т. 81. С. 17–18.
272. *Фет А.И.* Вариационные задачи на замкнутых многообразиях // Матем. сб. 1952. Т. 30. С. 271–316.
273. *Фет А.И.* Обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке // Учен. зап. Том. ун-та. 1952. Т. 17. С. 64–65.
274. *Фет А.И.* Фундаментальные группы пространств кривых на сфере // Учен. зап. Том. ун-та. 1952. Т. 17. С. 59–63.
275. *Фиников С.П.* Сопряженные сети с общими осями // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1946. Т. 3, вып. 1. С. 75–103.
276. *Финкельштейн В.М.* Классификация неголономных комплексов четырехпараметрического поля направлений // Докл. Третьей Сиб. конф. по матем. и мех. Томск, 1964. С. 217–218.
277. *Фукс Б.А.* О преобразованиях, оставляющих данную группу инвариантной // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 57–68.
278. *Фукс Б.А.* Обобщение одной теоремы S. Lie // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 98–101.
279. *Фукс Б.А.* Ueber einige Eigenschaften der pseudokonformen Abbildung // Матем. сб. 1936. Т. 1. С. 561–574.
280. *Фукс Б.А.* О группе движений геометрии, инвариантной при псевдоконформных отображениях // Докл. АН СССР. 1937. Т. 16. С. 153–156.
281. *Фукс Б.А.* Ueber vollstandig geodasische analytische Mannigffaltigkeiten einer vierdimensionalen Riemannschen Geometrie // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 168–174.
282. *Фукс Б.А.* Ueber geodasische Mannigfaltigkeiten einer bei pseudokonformen Abbildungen invarianten Riemannschen Geometrie // Матем. сб. 1937. Т. 2. С. 567–594.
283. *Фукс Б.А.* Limitation pour la variation d’un angle dans le cas d’une transformation pseudoconforme dans l’espace de deux variables com-plexes // C. r. Acad. sci. 1935. Vol. 200. P. 718–720.

284. *Фукс Б.А.* Die Gruppe der pseudokonformen Abbildungen eines Bereich in sich // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1937. Т. 1, вып. 3. С. 281–285.
285. *Фукс Б.А.* К теории однолистных псевдоконформных отображений // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 1. С. 147–155.
286. *Фукс Б.А.* Об инвариантной римановой метрике в теории псевдоконформных отображений и ее приложениях // Успехи матем. наук. 1939. Т. 6. С. 251–286.
287. *Черников В.В.* Область значений функционала $I = f(w)$ в классе ограниченных функций с вещественными коэффициентами // Труды Том. ун-та. 1964. Т. 175. С. 78–84.
288. *Черников В.В.* Об экстремальных свойствах однолистных функций с вещественными коэффициентами // Труды Том. ун-та. 1963. Т. 169. С. 69–95.
289. *Чунихин С.А.* О разрешимых группах // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 1. С. 270–271.
290. *Чунихин С.А., Чунихина И.К.* О p-разложимых группах // Матем. сб. 1944. Т. 15. С. 325–342.
291. *Щербаков Р.Н.* Репер линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции // Учен. зап. Бурят.-Монг. пед. ин-та. 1954. Т. 5. С. 61–89.
292. *Щербаков Р.Н.* Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций // Матем. сб. 1955. Т. 37, № 3. С. 527–556.
293. *Щербаков Р.Н.* Преобразования Егорова в теории конгруэнций // Труды III Всесоюз. матем. съезда. М.: Наука, 1956. Т. 1. С. 176–177.
294. *Щербаков Р.Н.* Эквиаффинно-инвариантные неголономные конгруэнции линейчатого комплекса // Матем. сб. 1963. Т. 60, № 2. С. 131–158.
295. *Щербаков Р.Н.* О методе репеража подмногообразий // Труды Том. ун-та. 1961. Т. 168, вып. 3. С. 5–11.
296. *Щербаков Р.Н.* О методе подвижного репера и репеража подмногообразий // Труды Том. ун-та. 1966. Вып. 6.
297. *Щербаков Р.Н.* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск, 1960.
298. *Эрдеш П., Туран П.* Ein zahlentheorietischer Satz // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 1. С. 101–103.
299. *Эрдеш П., Туран П.* Ueber die Vereinfachung eines Landauschen Satzes // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1935. Т. 1, вып. 2. С. 144–147.
300. *Эрдеш П.* On sequences of integers no one of which divides the product of the others and on some related problems // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 1. С. 74–82.
301. *Эйнштейн А., Розен Н.* On gravitational waves // Изв. ин-та матем. и мех. Том. ун-та. 1938. Т. 2, вып. 2. С. 53–63.
302. *Суворов С.Г.* Собственные функции нелинейных эллиптических операторов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
303. *Шварцман З.О.* Профессиональная педагогическая подготовка учителей в университете. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991.
304. *Кафедре* вычислительной математики и компьютерного моделирования 45 лет // Вестник Том. ун-та. Бюл. оперативной науч. информации. Томск, 2003. № 10.
305. *Место* математического анализа как науки в подготовке специалистов на ММФ ТГУ. Томск, 2004.
306. *Томский* педагогический институт. 1931–1981. Томск, 1981.
307. *Наша кафедра.* 25 лет кафедре физической и вычислительной механики: Сб. ст. / Под ред. А.М. Гришина. Томск, 2002.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р

С

Ш

Щ

Э

Ю

Я

ОГЛАВЛЕНИЕ

Николай Николаевич Круликовский

ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ В ТОМСКЕ

Редактор К.Г. Шилько
Корректор Н.А. Афанасьева
Оригинал-макет А.И. Лелоюр
Дизайн обложки В.Г. Караваев

Подписано к печати 06.03.2006. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Ризография.
Печ. л. 10,8. Усл. печ. л. 10,11.
Тираж 200 экз. Заказ № 77.

Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Участок оперативной ризографии и офсетной печати
редакционно-издательского отдела ТГУ
634050, г. Томск, Московский тр., 2-е, ауд. 011.
Телефон 52–98–49

ISBN 5-94621-175-7

9 785946 211758