

**Томский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики**

Попонин Владимир Сергеевич
Метод спектральных элементов на неструктурированной сетке в
вычислительной механике
учебное пособие

Томск 2009

Оглавление	
ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. Метод спектральных элементов для решения одномерных линейных краевых задач математической физики.....	6
1.1 Метод взвешенных невязок.....	7
1.2 Численное интегрирование.....	9
1.3 Спектральный метод.....	10
1.4 Алгоритм расчета одномерной задачи методом спектральных элементов.....	13
1.5 Преобразования координат.....	16
1.6 Сшивка решения на гранях конечных элементов.....	17
1.7 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	18
1.8 Задачи.....	21
ГЛАВА 2. Метод спектральных элементов для решения линейных краевых задач математической физики.....	23
2.1 Уравнение Пуассона.....	23
2.2 Аппроксимация уравнения Пуассона для пространственного случая.....	27
2.3 Результаты расчетов.....	30
2.4 Задачи.....	35
ГЛАВА 3. Метод спектральных элементов для решения плоских задач динамики вязкой жидкости на неразнесенных неструктурированных сетках.....	36
3.1 Несжимаемые вязкие течения. Математическая постановка задачи.....	36
3.2 Метод проекций.....	36
3.3 Результаты расчетов.....	37

ВВЕДЕНИЕ

Появление вычислительных машин в 60-х годах прошлого столетия стимулировало развитие вычислительных методов в естественных науках, инженерных дисциплинах и в управлении. Появление персональных компьютеров на рубеже 70-80 годов заметно ускорило процессы разработки новых алгоритмов и математических моделей. Дальнейшее развитие вычислительной техники – создание многопроцессорных компьютеров – позволяет успешно решать задачи моделирования сложных физических процессов.

Применение вычислительных методов оказалось особенно эффективным для задач динамики жидкости и газа, что позволило получить решения для круга задач, считавшихся ранее неразрешимыми. Связано это с тем, что такие особенности уравнений гидродинамики, как нелинейность, высокий порядок и возникновение разрывных решений, делают вычислительный метод наиболее предпочтительным и эффективным методом исследования.

В 60–70-х годах 20-го века наиболее широкое распространение получили методы конечных разностей [34], [31],[24],[27],[32]. Связано это было с тем, что достаточно правдоподобные аппроксимации данных дифференциальных уравнений можно было получить с небольшими затратами вычислительных ресурсов. Но круг задач, решаемых с помощью этого метода, был не широк и ограничивался интегрированием дифференциальных уравнений в областях простой формы. Для областей сложной геометрической формы приходилось находить преобразования координат, переводящие исходную область интегрирования в область стандартную или каноническую. Недостаток такого подхода очевиден – это отсутствие универсальных алгоритмов преобразования координат, и, как следствие, – наличие задач, для которых такой подход не применим.

Вышеупомянутые недостатки метода конечных разностей привели к разработке новых, более универсальных алгоритмов. Особенно широкое распространение получили методы конечных элементов [22],[29],[3] и методы контрольных объемов [16],[10], [12], [25]. Данные методы позволяют решать сложные инженерные задачи в реальных областях, форма которых далека от канонической. Недостатком метода конечных элементов является отсутствие консервативности, что может привести к нефизическим

решениям. Напротив, метод контрольного объема обладает свойством консервативности, что делает данный метод более предпочтительным. Однако, и метод конечных элементов, и метод контрольных объемов обладают существенным недостатком – низким порядком точности, что может оказаться критичным при решении ряда практических задач.

В связи со всем вышесказанным, особенно актуальным является разработка вычислительных алгоритмов, позволяющих решать задачи на неструктурированных сетках с высоким порядком аппроксимации.

Два фундаментальных качества производимых вычислений составляют основу всей вычислительной математики – это точность и быстрдействие расчетов. Если быстрдействие может быть увеличено, в том числе, и за счет технических решений, таких как, например, использование многопроцессорной техники или увеличение скорости обменных процессов в компьютере, то точность повышется, главным образом, за счет применения математических решений.

К высокоточным методам относится спектральный метод [2], [7], [15]. Принцип, лежащий в основе всех сеточных методов, заключается в сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений, которые могут быть решены известными методами [26], [25]. Однако, в спектральных методах [34], [21], [4] процедура, реализующая этот принцип, аналогична используемой в аналитических методах решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных. В этом случае решение ищется путём разложения в ряд по некоторой системе ортогональных функций, называемых базисными функциями. Имея представления искомым функций в виде разложения по базисным функциям, в глобальном спектральном методе строится система интегральных соотношений, получающихся умножением исходных или преобразованных дифференциальных уравнений на тестовую функцию и далее проводится интегрирование по всей области.

Использование глобального спектрального метода ограничено областями простой геометрической формы, что существенно сужает его применимость к реальным физическим процессам. В том числе для надёжного описания физического процесса требуется плотная сетка, покрывающая расчётную область, что приводит к использованию большого числа базисных функций для разложения решения. По причине ограниченных

возможностей ЭВМ, использование расширенного набора базисных функций, не даёт повышения качества результатов и во многих случаях, наоборот, приводит хотя и к незначительной, но все же потере точности решений [4], [13]. По указанным выше причинам глобальный спектральный метод не получил широкого распространения.

Метод спектральных элементов основан на тех же самых принципах, что и глобальный спектральный метод. Основное отличие метода спектральных элементов состоит в том, что интегрирование ведётся по части пространства независимых переменных, которую отождествляют с конечным элементом. Учитывая свойства базисных функций, удаётся выразить все интегралы через нули и веса наивысших аппроксимирующих полиномов. Таким образом, мы приходим к системе алгебраических уравнений для определения значений искомой функции в узлах сетки, определённой способом построения конечно-элементного разбиения и положением нулей наивысших полиномов на каждом из элементов разбиения. В таком случае для достижения необходимой точности расчётов и плотности сетки, накрывающей расчётную область, нет необходимости использовать излишне большое число базисных функций на каждом из элементов. Что приводит к существенной экономии вычислительных ресурсов без потери спектральной точности и даёт возможность проводить вычисления в геометрически сложных областях.

ГЛАВА 1. Метод спектральных элементов для решения одномерных линейных краевых задач математической физики

Все множество сеточных методов, которые принимаются для расчета течений жидкости можно разделить на две большие категории: глобальные методы и локальные методы. Локальные методы используют компактный шаблон и простые аппроксимации дифференциальных уравнений, что позволяет конструировать алгоритмы с относительно простой логикой проведения вычислений. В глобальных методах дифференциальный оператор аппроксимируется с использованием всех точек расчетной области, что дает возможность получить высокую точность решения, однако логика программного обеспечения таких методов является весьма непростой.

Высокоточные решения, полученные с помощью методов глобальной аппроксимации, могут использоваться для тестирования более простых алгоритмов, строящихся на основе методов локальной аппроксимации. Кроме того, высокоточные расчеты могут иметь самостоятельное значение при проектировании высокочувствительных приборов и оборудования, используемых в технических системах и научных исследованиях. Чтобы преобразовать исходное уравнение в частных производных (или систему таких уравнений) в систему алгебраических уравнений (или обыкновенных дифференциальных уравнений), можно выбрать один из нескольких вариантов. Наиболее общепринятыми являются метод конечных разностей, метод конечных элементов и спектральный метод. Способ осуществления дискретизации зависит также от того, рассматриваются ли производные по времени (в применении к задачам с зависимостью от времени), или же уравнения содержат только пространственные производные. В процессе замены отдельных членов исходных уравнений, представляющих собой частные производные, алгебраическими выражениями, связывающими узловые значения на конечной сетке, вносится некоторая ошибка. На практике дискретизация производных по времени осуществляется почти исключительно с использованием конечно-разностного метода. При дискретизации пространственных производных используется и метод конечных разностей, и метод конечных элементов, и метод конечных объемов, и спектральный метод, и метод граничных элементов.

В данной главе описываются основные определения метода

спектральных элементов, приводятся алгоритмы расчета одномерной линейной краевой задачи методом спектральных элементов, сшивки решения на гранях элементов, а также методы решения систем линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации исходного дифференциального уравнения.

1.1 Метод взвешенных невязок

Основные принципы метода взвешенных невязок рассмотрены в работах [34], [23],[21]. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$Gu - f = 0 \text{ на } \Omega, u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad (1.1)$$

где G -линейный дифференциальный оператор, f -алгебраический свободный член, $\partial\Omega$ - непрерывный замкнутый контур. Формулировка задачи, выполненная в рамках метода взвешенных невязок [1] выглядит следующим образом.

Необходимо найти

$u \in U, U = \{u(x) | u \in H^2(\Omega), u = \varphi(x) \text{ на } \partial\Omega\}$, такую что

$$(Gu - f, w)_w = 0, \forall w \in W, \quad (1.2)$$

где

$$W = \{w | w \in L^2(\Omega), w = 0 \text{ на } \partial\Omega\}, \quad (1.3)$$

$L^2(\Omega)$ -пространство функций, интегрируемых с квадратом,

$H^2(\Omega)$ -пространство функций Соболева.

Скалярное произведение в пространстве L^2 определяется соотношением:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dV.$$

В связи с этим, формула (1.2) перепишется так:

$$\int_{\Omega} (Gu - f) w dV = 0 \forall w \in W. \quad (1.4)$$

Следующий шаг в дискретизации состоит в том, что необходимо ввести конечномерное подпространство $U^h \in U$ с базисом φ_i , $i=0..N$. Тогда приближенное решение $u^h \in U^h$ можно записать в виде:

$$u^h = \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1) получим:

$$G^h u^h - f^h = r^h. \quad (1.6)$$

где r^h -невязка уравнения (1.1). Коэффициенты c_i , входящие в (1.5), являются неизвестными величинами и могут быть найдены из условия равенства нулю нормы невязки, введённой в пространстве L^2 , т.е. $(r^h, w)_W = 0, \forall w \in W$. Так как приближенное решение, и в том числе невязка r^h , является элементом конечномерного подпространства U^h , то размерность пространства тестовых функций W может быть уменьшена до конечномерного подпространства $W^h \subset W$. Далее, если система функций $\psi_j, j = 0..N$ составляет базис тестовых функций, то линейное подпространство будет полностью определяться этим базисом:

$$W^h = \{\psi_j | j = 0..N\}. \quad (1.7)$$

В итоге формулировка задачи, выполненная в рамках метода взвешенных невязок, выглядит следующим образом:

Найти $u^h \in U^h$, такую что

$$(G^h u^h - f^h, w^h)_W = 0, \forall w^h \in W^h \quad (1.8)$$

или, используя определение скалярного произведения в пространстве L^2 , для определения $c_i, i = 0..N$ можно записать систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^N \int_{\Omega} (L^h \varphi_i) \psi_j dV = \int_{\Omega} f^h \psi_j dV, j = 0..N \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) в матричном виде переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{ij} c_i &= f_j, \\ G_{ij} &= \int_{\Omega} (G^h \varphi_i) \psi_j dV, \\ f_j &= \int_{\Omega} f^h \psi_j dV, j = 0..N. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решив систему уравнений (1.10) и подставив полученное решение в

уравнение (1.5), найдём приближенное решение u^h уравнения (1.2). К методам взвешенных невязок относятся методы конечных элементов, контрольных объемов, а также спектральный метод. Если G линейный дифференциальный оператор второго порядка, то можно проинтегрировать по частям уравнение (1.4). В большинстве случаев эквивалентная билинейная форма $a(u, w)_w$ может быть выведена таким образом, что (1.2) переписывается в виде:

необходимо найти $u \in U$, такую что $a(u, w)_w = (f, w)_w \quad \forall w \in W$.

Формулировка видоизмененной таким образом дифференциальной задачи будет называться слабой формулировкой. В работах [4],[21] показаны преимущества слабой формулировки, которые состоят в следующем:

1. Понижает порядок высшей производной в уравнениях. Так, например, слабая формулировка дифференциального уравнения второго порядка включает только первые производные. Поэтому становится возможным решать дифференциальные уравнения второго порядка, используя кусочно-линейные функции (вторые производные от этих функций равны 0, следовательно, они бесполезны для решения дифференциальных уравнений второго порядка). Однако применительно к слабой форме, кусочно-линейный базис дает второй порядок аппроксимации.

2. Позволяет эффективно решать задачи стефановского типа, с явным выделением границы фазового перехода, на которой искомая функция имеет слабый разрыв, а также другие задачи.

3. Некоторые методы взвешенных невязок, например, метод спектральных элементов, требуют преобразование координат. Использование только первых производных существенно облегчает вид дифференциального уравнения после преобразования координат.

1.2 Численное интегрирование

Все методы взвешенных невязок требуют расчета интегралов. Однако использование метода трапеций приводит к потере точности расчета. Для метода высокого порядка точности необходимо вычислять и интегралы с высоким порядком точности. Типичные алгоритмы расчета интегралов с высоким порядком точности приведены в [18], а применение и интерпретация этих

алгоритмов дана в [26]. Общая черта этих методов состоит в том, что решение разлагается по некоторому базису. Тогда общая формула для численного интегрирования может быть записана в виде:

$$\int_a^b p(\xi) f(\xi) = \sum_{i=0}^N w_i f(\xi_i) + R_N(f),$$

где $p(\xi)$ - весовая функция, удовлетворяющая условиям:

$$p(\xi) \geq 0 \text{ и } \int_a^b p(\xi) d\xi > 0$$

Теорема Гаусса звучит следующим образом: необходимо найти w_i, ξ_i , такие, что невязка $R_N(f)$ равнялась нулю для полиномов максимально возможной степени.

В большинстве случаев применяются ортогональные системы полиномов Лежандра и Чебышева.

1.3 Спектральный метод

Спектральный метод использует приближенное решение в той же форме (5), что и традиционные методы взвешенных невязок. Как и в традиционном методе Галеркина [1], аппроксимирующие и весовые функции отличны от нуля во всей вычислительной области. В этом отношении спектральный метод является глобальным методом. Наиболее существенное отличие спектрального метода от традиционных подходов, связанных с применением метода взвешенных невязок состоит в том, что указанный метод использует в качестве аппроксимирующих и весовых функций ортогональные функции, являющиеся собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, определённой на $\Omega = (-1, 1)$:

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{d\varphi_i}{dx} \right) + b(x) \varphi_i = \lambda_i w(x) \varphi_i, a > 0, b \geq 0, \tag{1.11}$$

$$\varphi_i(-1) = \varphi_i(1) = 0.$$

В общем случае решением задачи (1.11) являются полиномы Якоби. Так как полиномы Якоби взаимно ортогональны на

интервале $[-1, 1]$, можно доказать, что

$$\forall u \in U : \lim_{N \rightarrow \infty} \|u - P_N^h u\| = 0 \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (1.12)$$

здесь $P_N^h u = \sum_{i=0}^N c_i \varphi_i$.

Более того, если $u \in H^m(\Omega)$, иными словами, если искомое решение u является m -раз непрерывно дифференцируемым, то, согласно [6], ошибка аппроксимации будет следующей:

$$\|u - P_N^h u\|_{L_2} \leq C_1 N^{-m} \|u\|_{H^m}. \quad (1.13)$$

Таким образом, используя спектральное разложение, для достаточно гладких функций можно получить экспоненциальную скорость сходимости приближенного решения к точному. В этом и состоит основное преимущество спектрального метода: очень точные приближенные решения могут быть получены при небольшом числе слагаемых (5), причём ошибка аппроксимации будет уменьшаться экспоненциально с ростом N . Необходимо отметить также, что, поскольку спектральный метод является глобальным методом, то, определив коэффициенты приближенного разложения (5), можно получить значения искомой функции в любой точке области с заданным порядком точности.

Недостатком глобального спектрального метода является то, что многочлены Якоби являются ортогональными на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, утверждения об экспоненциальной скорости сходимости приближенного решения к точному имеют место только в случае, если область интегрирования представляет собой ($u \in \mathfrak{R}$) отрезок $\bar{\Omega} = [-1, 1]$. Для того, чтобы решить задачу с произвольной областью интегрирования, необходимо найти замену координат, переводящую исходную область интегрирования в единичный отрезок.

Спектральный метод обобщается на случай двух и более измерений путём использования в качестве базисных функций тензорного произведения соответствующих одномерных базисных функций.

В случае двух и более измерений задача о нахождении преобразования координат становится достаточно сложной, особенно если область интегрирования имеет сложную форму. Поэтому имеет смысл разбить исходную расчетную область на

конечные элементы и искать локальные представления решения через специальные функции, определенные на этих элементах. Однако при дискретизации, полученной на основе локального спектрального метода, матрица системы становится плохо обусловленной, что приводит к медленной сходимости итерационных методов. Эта проблема, как и в случае обычных локальных аппроксимаций, решается с использованием методов на основе пространств Крылова и подбором преобуславливателей.

В качестве базисных функций рекомендуется использовать интерполяционные многочлены, представляющие собой комбинации полиномов Лежандра и их производных и получившие название полиномов Гаусса – Лежандра – Лобатто [5]:

$$u(x) = \sum_{i=0}^N u_i C_i(x) , \quad (1.14)$$

$$C_i(x) = \frac{-1}{N(N+1)L'_N(x_i)} \frac{(1-x^2)L'_N}{x-x_i} , \quad (1.15)$$

$$C_i(x_j) = \delta_{ij} ,$$

здесь δ_{ij} - символ Кронекера, x_j - точки Лежандра – Гаусса – Лобатто, определяемые формулой:

$$x_0 = -1 ,$$

$$x_j - \text{нули } L'_N, 1 \leq j \leq N-1 ,$$

$$x_N = 1 . \quad (1.16)$$

Веса, необходимые для численного интегрирования при использовании интерполяционных функций (1.14), (1.15) определяются соотношением:

$$\omega_j = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L'_N(x_j)^2} , j = 0,1,\dots,N . \quad (1.17)$$

В то же время сами полиномы Лежандра определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_0(x) = 1 ,$$

$$L_1(x) = x , \quad (1.18)$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x) , n = 1,2,\dots,N .$$

Полиномы (1.18) получаются из решения задачи (1.11) при

$$\begin{aligned} a(x) &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ b(x) &= 0, \\ w(x) &= 1. \end{aligned}$$

1.4 Алгоритм расчета одномерной задачи методом спектральных элементов

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), \quad (1.19)$$

определенное на отрезке $[-1, 1]$ с граничными условиями:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{du}{dx}(-1) + b_1 u(-1) &= c_1; \\ a_2 \frac{du}{dx}(1) + b_2 u(1) &= c_2; \end{aligned} \quad (1.20)$$

здесь $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ некоторые константы.

Решение

Уравнение (1.19) в слабой постановке [4] переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} v(1)p(1)\frac{du}{dx}(1) - v(-1)p(-1)\frac{du}{dx}(-1) - \int_{-1}^1 p(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx - \\ - \int_{-1}^1 v(x)q(x)u(x)dx = - \int_{-1}^1 v(x)f(x)dx \end{aligned} \quad (1.21)$$

Выполним преобразования:

$$\frac{du}{dx}(-1) = \frac{1}{a_1} \{c_1 - b_1 u(-1)\} \quad (1.22)$$

$$\frac{du}{dx}(1) = \frac{1}{a_2} \{c_2 - b_2 u(1)\} \quad (1.23)$$

Подставим (1.22), (1.23) в (1.21):

$$\begin{aligned} v(1)p(1)\frac{b_2}{a_2}u(1) - v(-1)p(-1)\frac{b_1}{a_1}u(-1) + \int_{-1}^1 p(x)\frac{dv}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)dx + \\ + \int_{-1}^1 v(x)q(x)u(x)dx = \int_{-1}^1 v(x)f(x)dx + v(1)p(1)\frac{c_2}{a_2} - v(-1)p(-1)\frac{c_1}{a_1} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Используем интерполяционные формулы:

$$v(x) = C_i(x), i = 0..N,$$

$$u(x) = \sum_{j=0}^N u_j C_j(x). \quad (1.25)$$

Тогда для каждого индекса $i, i = 0..N$ уравнение (1.24) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{i,N}p(1)\frac{b_2}{a_2}u_N - \delta_{i,0}p(-1)\frac{b_1}{a_1}u_0 + \sum_{j=0}^N u_j \int_{-1}^1 p(x)C_{j,x}(x)C_{i,x}(x)dx + \\ + \sum_{j=0}^N u_j \int_{-1}^1 C_i(x)q(x)C_j(x)dx = \int_{-1}^1 C_i(x)f(x)dx + \delta_{i,N}p(1)\frac{c_2}{a_2} - \delta_{i,0}p(-1)\frac{c_1}{a_1} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Входящие в (1.26) интегралы вычисляются используя квадратурные формулы Гаусса:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^N w_k f(x_k),$$

где w_k, x_k - веса и точки квадратур, определенные формулами (1.16) и (1.17).

Тогда формула (1.26) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{i,N}p(1)\frac{b_2}{a_2}u_N - \delta_{i,0}p(-1)\frac{b_1}{a_1}u_0 + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N w_k u_j p(x_k)C_{j,x}(x_k)C_{i,x}(x_k) + \\ + \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N w_k u_j C_i(x_k)q(x_k)C_j(x_k) = \sum_{k=0}^N w_k C_i(x_k)f(x_k) + \delta_{i,N}p(1)\frac{c_2}{a_2} - \delta_{i,0}p(-1)\frac{c_1}{a_1} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Воспользовавшись формулой (1.15) и ведя обозначение $D_{i,j} \equiv C_{j,N}(x_i)$, формулу (1.27) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \delta_{i,N} p(1) \frac{b_2}{a_2} u_N - \delta_{i,0} p(-1) \frac{b_1}{a_1} u_0 + \sum_{j=0}^N \left\{ \sum_{k=0}^N w_k p(x_k) D_{k,j} D_{k,i} + w_i q(x_i) \delta_{i,j} \right\} u_j \\ & = w_i f(x_i) + \delta_{i,N} p(1) \frac{c_2}{a_2} - \delta_{i,0} p(-1) \frac{c_1}{a_1} \end{aligned} \quad (1.28)$$

В знаменателях дробей присутствуют a_1 либо a_2 только в случае, когда $i = 0$ или $i = N$. Умножим правую и левую часть уравнения (1.28) на величину

$$1 + (a_1 - 1) \delta_{i,0} + (a_2 - 1) \delta_{i,N} \quad (1.29)$$

Преобразуем формулу (1.28), используя формулу (1.29):

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + (a_1 - 1) \delta_{i,0} + (a_2 - 1) \delta_{i,N} \right\} \sum_{j=0}^N \left\{ \sum_{k=0}^N w_k p(x_k) D_{k,j} D_{k,i} + w_i q(x_i) \delta_{i,j} \right\} u_j + \\ & + \delta_{i,N} p(1) b_2 u_N - \delta_{i,0} p(-1) b_1 u_0 = \\ & = \left\{ 1 + (a_1 - 1) \delta_{i,0} + (a_2 - 1) \delta_{i,N} \right\} w_i f(x_i) + \delta_{i,N} p(1) c_2 - \delta_{i,0} p(-1) c_1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

В матричном виде уравнение (1.30) можно записать следующим образом:

$$Lu = f, \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned}
L_{i,j} &= \sum_{k=0}^N w_k p(x_k) D_{k,j} D_{k,i} + w_i q(x_i) \delta_{ij} \quad i=1,2,\dots,(N-1), \\
L_{0,j} &= a_1 \sum_{k=0}^N w_k p(x_k) D_{k,j} D_{k,i} + a_1 w_0 q(x_0) \delta_{0,j} - \delta_{0,j} p(-1) b_1, \\
L_{N,j} &= a_2 \sum_{k=0}^N w_k p(x_k) D_{k,j} D_{k,i} + a_2 w_N q(x_N) \delta_{N,j} + \delta_{N,j} p(1) b_2, \\
f_i &= w_i f(x_i), \quad i=1,2,\dots,(N-1), \\
f_0 &= a_1 w_0 f(x_0) - p(-1) c_1, \\
f_N &= a_2 w_N f(x_N) + p(1) c_2,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Производные от интерполяционных функций будут иметь следующий вид:

$$\frac{dC_j}{dx}(x_i) \equiv D_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4} N(N+1), i=j=0 \\ -\frac{1}{4} N(N+1), i=j=N \\ 0, i=j \wedge 0 < j < N \\ \frac{L_N(x_i)}{L_N(x_j)(x_i - x_j)}, i \neq j \end{cases} \tag{1.33}$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (1.32), получим значения искомой функции в узлах сетки.

1.5 Преобразования координат

Пусть область интегрирования представляет собой отрезок $[a,b]$. Покроем интервал сеткой: $x_1 = a, \dots, x_i = a + l \cdot h, \dots, x_n = b$. Поскольку интерполяционные полиномы (1.15) являются ортогональными на отрезке $[-1,1]$, нам необходимо найти такие преобразование координат, которые бы переводили одномерные

элементы $[x_j, x_{j+1}]$ к каноническому виду.

Пусть r - вычислительная координата, $r \in [-1, 1]$. Тогда физическая координата x будет связана с вычислительной координатой r на элементе с индексом e следующим соотношением:

$$x_e \equiv \frac{(b_e - a_e)}{2} r_e + \frac{(b_e + a_e)}{2}. \quad (1.34)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} p_{e,j} &\equiv p(x_{e,j}), \\ q_{e,j} &\equiv q(x_{e,j}), \\ f_{e,j} &\equiv f(x_{e,j}). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Необходимо также преобразовать интегралы и производные следующим образом:

$$\frac{d}{dx} = \frac{2}{b_e - a_e} \frac{d}{dr} \equiv S_e \frac{d}{dr}, \quad (1.36)$$

Здесь $S_e = \frac{2}{b_e - a_e}$.

Интегралы, входящие в аппроксимирующие формулы исходного дифференциального уравнения, будут иметь вид:

$$\int f dx = \int f \frac{dx}{dr} = \int f \frac{1}{S_e} dr. \quad (1.37)$$

1.6 Сшивка решения на гранях конечных элементов

В слабой формулировке базисные и тестовые функции должны быть непрерывными на гранях элементов, однако непрерывность первой производной не требуется. Иными словами, функции u, v должны принадлежать пространству C^0 . Непрерывность решения достигается за счет выбора в качестве базиса функций, определяемых формулами (1.14). Непрерывность решения означает, что коэффициенты полиномиального базиса, относящиеся к одной и той же граничной точке, должны совпадать.

В двумерном или трехмерном случае принципы сшивки

решения остаются прежними, единственное отличие состоит в том, что сшивка решения осуществляется уже по некоторому набору точек, принадлежащих общей грани элементов. Реализация сшивки решения на гранях элементов не вызывает никаких трудностей, если выполняются следующие два случая:

1. Два граничных элемента геометрических конформны. Это означает, что правая грань элемента совпадает с левой гранью граничного элемента, и наоборот.

2. Степень полиномиальной аппроксимации совпадает на каждом из граничных элементов.

В случае выполнения вышеупомянутых условий узловые точки сетки совпадают на общих гранях элементов. Таким образом, непрерывность решения можно достичь, потребовав, чтобы коэффициенты полиномиального базиса были одинаковыми для всех общих точек.

Введем функцию индекса следующим образом:

$$I(e, j) = (N - 1)(e - 1) + j, \quad (1.38)$$

здесь e - индекс элемента.

Тогда формулы (1.32), с учетом (1.34) -(1.38), в случае нулевых граничных условий Дирихле, примут следующий вид:

$$L_{I(e,i)(e,j)} = L_{I(e,i)(e,j)} + \sum_{k=0}^N w_k S_e P_{e,k} D_{k,i} D_{k,j} + \frac{w_i \delta_{i,j} q_{e,j}}{S_e}, \quad i, j = 0..N \quad (1.39)$$

$$f_{I(e,i)} = f_{I(e,i)} + \frac{w_i}{S_e} f_{e,i}, \quad i, j = 0..N$$

1.7 Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

В результате дискретизации уравнения (1.19) получим систему линейных алгебраических уравнений. Известно, что матрицы в таких системах являются разреженными. Запишем систему линейных алгебраических уравнений в виде

$$Ax = b,$$

где A – разреженная матрица, x – вектор неизвестных, b – вектор правой части.

Наиболее простой алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений с точки зрения реализации – метод

Гаусса-Зейделя. Однако, метод Гаусса-Зейделя крайне неэффективен, так как матрицы системы имеют слабое диагональное преобладание. Поэтому для расчета таких систем применяют методы сопряженных градиентов (BICGSTAB) и метод обобщенных невязок (GMRES) совместно с неполной LU -факторизацией [8]. В основе данного предобуславливателя лежит неполное разложение матрицы A на нижнюю треугольную L и верхнюю треугольную U (разложение Гаусса для заполненной матрицы). Для разреженных матриц используется неполное разложение ILU с исключением элементов, принадлежащих определенному множеству. В методе $ILU(0)$ в качестве такого множества берется множество пар индексов, соответствующих нулевым элементам матрицы A . Полученное разложение является предобуславливающей матрицей к исходной матрице системы:

$$U^{-1}L^{-1}Ax = U^{-1}L^{-1}b.$$

Данную систему можно быстро решить методом BICGSTab [8], алгоритм которого следующий:

1. Рассчитываем $r_0 = U^{-1}L^{-1}(b - Ax_0)$, x_0 - произвольное начальное приближение;
2. $p_0 = r_0$;
3. Фиксируем индекс $j = 0$;
4. Вычисляем $\alpha_j = \frac{(r_j, r_0)}{(U^{-1}L^{-1}Ap_j, r_j)}$;
5. Рассчитываем $s_j = r_j - \alpha_j U^{-1}L^{-1}Ap_j$;
6. $\omega_j = \frac{(U^{-1}L^{-1}As_j, s_j)}{(U^{-1}L^{-1}As_j, U^{-1}L^{-1}As_j)}$;
7. $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j + \omega_j s_j$;
8. $r_{j+1} = s_j - \omega_j U^{-1}L^{-1}As_j$;
9. $\beta_{j+1} = \frac{(r_{j+1}, r_j)}{(r_j, r_0)} \cdot \frac{\alpha_j}{\omega_j}$;
10. $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - \omega_j U^{-1}L^{-1}As_j)$;
11. Если $\|r_{j+1}\| > \varepsilon$, переходим на шаг 4, в противном случае

заканчиваем расчет.

Применение метода BICGStab с предобуславливателем, полученным разложением ILU(0), позволяет существенно сократить число итераций в расчете систем линейных уравнений. Наряду с методом BICGStab для решения систем линейных уравнений применили также метод GMRES с неполной LU-факторизацией [8]. Алгоритм данного метода следующий:

1. Рассчитываем $r_0 = b - Ax_0$, $\beta = \|r_0\|_2$, $v_1 = \frac{r_0}{\beta}$;
2. Определим матрицу размерности $m; m \leq N$, где N - размерность задачи, следующим образом:
 $H_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m}$. Положим нулю все элементы матрицы H_m .
3. For $j = 1..m$ Do:
4. Вычислить $\omega_j = Av_j$;
5. For $i = 1..j$ Do:
6. $h_{ij} = (\omega_j, v_i)$;
7. $\omega_j = \omega_j - h_{ij}v_i$;
8. End Do;
9. $h_{j+1,j} = \|\omega_j\|_2$. Если $h_{j+1,j} = 0$, присвоить $m = j$ и перейти на шаг 12.
10. $v_{j+1} = \frac{\omega_j}{h_{j+1,j}}$;
11. End do;
12. $y_m = \min \|\beta e_1 - H_m y\|_2$; $x_m = x_0 + V_m y_m$.

1.8 Задачи

1. Пусть коэффициенты, входящие в (1.19) имеют вид:

$$p(x) = 1,$$

$$q(x) = 1,$$

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Пусть область интегрирования (1.19) – отрезок $[-1, 1]$. Произвести расчет (1.19) спектральным методом (число разбиений области интегрирования – 1) для степеней $N = 3, 5, 7, 9$.

2. Пусть коэффициенты, входящие в (1.19) имеют вид:

$$p(x) = 1,$$

$$q(x) = 1,$$

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Пусть область интегрирования (1.19) – отрезок $[-1, 1]$. Произвести расчет (1.19) методом спектральных элементов (число разбиений области интегрирования – 5, 10, 15, 25, 100, 500) для степеней $N = 3, 5, 7, 9$. Для решения системы использовать метод Гаусса-Зейделя.

3. Пусть коэффициенты, входящие в (1.19) имеют вид:

$$p(x) = 1,$$

$$q(x) = 1,$$

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Пусть область интегрирования (1.19) – отрезок $[-1, 1]$. Произвести расчет (1.19) методом спектральных элементов (число разбиений области интегрирования – 5, 10, 15, 25, 100, 500) для степеней $N = 3, 5, 7, 9$. Для решения системы использовать метод сопряженных градиентов совместно с неполной LU-факторизацией.

4. Пусть коэффициенты, входящие в (1.19) имеют вид:

$$p(x) = 1,$$

$$q(x) = 1,$$

$$f(x) = \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} x.$$

Пусть область интегрирования (1.19) – отрезок $[-1, 1]$. Произвести расчет (1.19) методом спектральных элементов (число разбиений области интегрирования – 5, 10, 15, 25, 100, 500) для степеней $N = 3, 5, 7, 9$. Для решения системы использовать метод обобщенных невязок совместно с неполной LU-факторизацией.

ГЛАВА 2. Метод спектральных элементов для решения линейных краевых задач математической физики

2.1 Уравнение Пуассона

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f(x), x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathfrak{R}^m$ и $\Omega \subset \mathfrak{R}^m$. Рассмотрим проблему построения решения (2.1) в слабой постановке:

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 u v dV = \int_{\Omega} f v dV. \quad (2.2)$$

К левой части уравнения (2.2) применим формулу Грина:

$$-\int_{\Omega} \nabla^2 u v dV = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV - \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS = \int_{\Omega} f v dV. \quad (2.3)$$

Здесь $\hat{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ нормаль к поверхности $\partial\Omega$. В результате наша задача (2.1) переформулирована для пространства функций Соболева:

$$u, v \in H_0^1(\Omega) = \left\{ u(x) \mid u|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (2.4)$$

Формулу (2.2) с учётом (2.3) можно преобразовать следующим образом:

$$-\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV = \int_{\Omega} f v dV + \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS. \quad (2.5)$$

Рассмотрим различные типы областей $\Omega \subset \mathfrak{R}^m$. Наипростейший случай - это кубическая область $\Omega = (-1, 1)^m \subset \mathfrak{R}^m$. В этом случае интерполяционная формула может быть рассмотрена в виде прямого произведения одномерных базисных функций:

$$u(x) = \sum_{p_1=1, \dots, p_m=1}^N u_{p_1, \dots, p_m} \prod_{i=1}^m C_{p_i}(x_i). \quad (2.6)$$

На элементе рассмотрим тестовые функции вида:

$$v_{q_1, \dots, q_m}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m C_{q_i}(x_i). \quad (2.7)$$

Для простоты, предположим, что мы имеем граничные условия Дирихле. В таком случае нет необходимости производить расчёт интеграла $\iint_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$. Конкретную реализацию граничных условий мы рассмотрим более подробно ниже.

Подставим (2.6) и (2.7) в уравнение (2.5). С учётом того, что область интегрирования $\bar{\Omega} = [-1, 1]^m \subset \mathfrak{R}^m$, получим:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV = \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^m \sum_{p_1, \dots, p_m=1}^N u_{p_1, \dots, p_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{p_i}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{q_i}(x_i) dx_1 \dots dx_m. \quad (2.8)$$

Далее, выражение (2.8) может быть переписано как:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dV = \sum_{k=1}^m \sum_{p_1, \dots, p_m=1}^N u_{p_1, \dots, p_m} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{p_i}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{q_i}(x_i) dx_1 \dots dx_m. \quad (2.9)$$

В конечном итоге получаем:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{p_i}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \prod_{i=1}^m C_{q_i}(x_i) dx_1 \dots dx_m = \int_{-1}^1 \frac{\partial C_{p_k}(x_k)}{\partial x_k} \frac{\partial C_{q_k}(x_k)}{\partial x_k} dx_k \prod_{i=1, i \neq k}^m \int_{-1}^1 C_{p_i}(x_i) C_{q_i}(x_i) dx_i. \quad (2.10)$$

Поскольку мы хотим получить метод, позволяющий аппроксимировать решение с высоким порядком точности, то и интегралы, входящие в формулу (2.10) необходимо вычислять с высоким порядком точности. Для этого используем квадратурные формулы Гаусса.

В случае использования в качестве $C_{p_i}(x_i)$ ортогональных нормированных функций имеем, что:

$$\int_{-1}^1 C_{p_i}(x_i) C_{q_i}(x_i) dx_i = \sum_{l_i=1}^N \omega_{l_i} C_{p_i}(x_i^{l_i}) C_{q_i}(x_i^{l_i}). \quad (2.11)$$

Используя ортогональность интерполяционных функций и формулу (2.11), выражение (2.9) примет вид:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_k} dx_1 \dots dx_m = \sum_{p_1=1, \dots, p_m=1}^N u_{p_1, \dots, p_m} \sum_{k=1}^m \int_{-1}^1 \frac{\partial C_{p_k}(x_k)}{\partial x_k} \frac{\partial C_{q_k}(x_k)}{\partial x_k} dx_k \prod_{i=1, i \neq k}^m \omega_{p_i} \delta_{p_i, q_i}. \quad (2.12)$$

Проинтегрируем выражение $\int_{-1}^1 \frac{\partial C_{p_k}(x_k)}{\partial x_k} \frac{\partial C_{q_k}(x_k)}{\partial x_k} dx_k$ с

использованием квадратурных интегральных формул Гаусса:

$$\int_{-1}^1 \frac{\partial C_{p_k}(x_k)}{\partial x_k} \frac{\partial C_{q_k}(x_k)}{\partial x_k} dx_k = \sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\partial C_{p_k}(x_k^j)}{\partial x_k} \frac{\partial C_{q_k}(x_k^j)}{\partial x_k}, \quad (2.13)$$

здесь ω_j - веса квадратур, x_k^j - нули исходных интерполяционных функций. В настоящей работе мы использовали интерполяционные функции и соответствующие им квадратурные веса и нули, определяемые формулами (1.16) - (1.17).

Аналогично распишем правую часть формулы (2.5), с использованием выражения (2.7):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f(x) \cdot v(x) dx_1 \dots dx_m &= \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 f(x) \prod_{i=1}^m C_{q_i}(x_i) dx_1 \dots dx_m = \\ &= \sum_{l_1=1}^N \dots \sum_{l_m=1}^N f(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, \dots, x_m^{l_m}) \prod_{i=1}^m \omega_{l_i} C_{q_i}(x_i^{l_i}) = \\ &= \sum_{l_1=1}^N \dots \sum_{l_m=1}^N f(x_1^{l_1}, x_2^{l_2}, \dots, x_m^{l_m}) \prod_{i=1}^m \omega_{l_i} \delta_{q_i, l_i}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь ω_{l_i} - веса, $x_i^{l_i}$ - нули полинома в i -ом измерении.

Используя формулы (2.10), (2.13) и (2.14), а так же меняя индексы $q_1 = 1..N, \dots, q_m = 1..N$, получим матрицу системы и вектор правой части.

Остановимся подробнее на методе аппроксимации граничных условий. В работах [1], [5] авторы требуют, чтобы условия на границе были нулевыми. В этих работах отмечается, что в случае ненулевых граничных условий интерполяционные функции не будут удовлетворять граничным условиям и соответственно невозможно достичь высокой точности расчёта. В работе [5] предлагают исходную задачу (1) в случае ненулевых граничных условий привести к виду:

$$Gv = \varphi, \quad (2.15)$$

где $u(x) = v(x) + B(x)$, $\varphi(x) = f(x) - G(B(x))$. Здесь функция $B(x)$ удовлетворяет ненулевым граничным условиям. Такой подход является неудобным в связи с трудностью подбора функции $B(x)$. Однако можно воспользоваться технологией метода конечных элементов, применяемого для решения задач с ненулевыми граничными условиями. Мы полагали неизвестными все точки расчётной области, включая граничные. В случае граничных условий Дирихле нет надобности производить расчёт

интеграла $\iint_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$, поскольку значения искомой функции

определены в точках границы. Фиксируя индекс q_i можно получить строку коэффициентов спектрального разложения для нахождения узловых значений зависимой функции, в том числе и в точках границы. В случае граничных условий Дирихле для граничной точки, соответствующей индексу q_i , получаем строку матрицы, состоящую из одного ненулевого элемента, равного единице, и расположенного на диагонали матрицы. В правую часть в таком случае мы записываем значения функции на границе. Для внутренней точки, соответствующей индексу q_i , мы получаем строку коэффициентов, где число ненулевых элементов в строке равно N^m , где N - степень полинома, m - размерность задачи. Коэффициенты разложения определяются формулой (2.12). Если же какая-либо точка u_{p_1, \dots, p_m} попадает на границу, то, в случае граничных условий Дирихле, мы переносим значение функции в этой точке с соответствующим спектральным коэффициентом в правую часть. Таким образом, мы достигаем согласованности интерполяционных функций и граничных условий. В случае

граничных условий Неймана, для каждой граничной точки, соответствующей индексу q_i , мы получаем строку матрицы, состоящую из спектральных коэффициентов, определяемых формулой (2.12), к этим коэффициентам мы также должны добавить вклады от расчёта интеграла $\int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$. Так как

производная $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ является заданной, то произвести расчёт вышеупомянутого интеграла не представляет трудностей. Далее, для каждой внутренней точки, соответствующей фиксированному индексу, мы вновь получаем строку матрицы, состоящую из спектральных коэффициентов, определяемых формулой (2.12). Таким образом, мы опять получаем согласованность интерполяционных функций и граничных условий. Такой подход позволяет получать решения высокого порядка точности для граничных условий любого типа, кроме того, обработка граничных условий становится универсальной и не составляет никаких трудностей.

2.2 Аппроксимация уравнения Пуассона для пространственного случая

Рассмотрим кубическую область $\Omega = (-1,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$. В этом случае интерполяционная формула может быть рассмотрена в виде прямого произведения одномерных базисных функций:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1, i_2=1, i_3=1}^N U_{i_1, i_2, i_3} \prod_{i=1}^3 C_{p_i}(x_i). \quad (2.16)$$

На элементе рассмотрим тестовые функции вида:

$$v_{q_1, q_2, q_3}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^3 C_{q_i}(x_i). \quad (2.17)$$

Для простоты, предположим, что мы имеем граничные условия Дирихле. В таком случае нет необходимости производить

расчёт интеграла $\iiint_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} dS$.

С учетом (2.16), (2.17), левую часть формулы (2.5) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz = \\
& = \iiint_{-1}^1 \iiint_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial x} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \right. \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial y} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) \right) \frac{\partial}{\partial z} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) \right) dx dy dz = \\
& = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \iiint_{-1}^1 \iiint_{-1}^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial x} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \right. \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial y} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial y} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) + \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial z} (C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{i_3}(z)) \frac{\partial}{\partial z} (C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z)) \right) dx dy dz = \\
& = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \iiint_{-1}^1 \iiint_{-1}^1 \left(C_{i_2}(y) C_{i_3}(z) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{p_1}(x) + \right. \\
& \quad + C_{i_1}(x) C_{i_3}(z) C_{p_2}(y) C_{p_3}(z) \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{p_2}(y) + \\
& \quad \left. C_{i_1}(x) C_{i_2}(y) C_{p_1}(x) C_{p_2}(y) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{p_3}(z) \right) dx dy dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_2}(y) C_{\rho_2}(y) C_{i_3}(z) C_{\rho_3}(z) \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{\rho_1}(x) \right) dx dy dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_1}(x) C_{\rho_1}(x) C_{i_3}(z) C_{\rho_3}(z) \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{\rho_2}(y) \right) dx dy dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(C_{i_1}(x) C_{\rho_1}(x) C_{i_2}(y) C_{\rho_2}(y) \frac{\partial}{\partial z} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{\rho_3}(z) \right) dx dy dz \right) = \\
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial x} C_{i_1}(x) \frac{\partial}{\partial x} C_{\rho_1}(x) dx \int_{-1}^1 C_{i_2}(y) C_{\rho_2}(y) dy \int_{-1}^1 C_{i_3}(z) C_{\rho_3}(z) dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 C_{i_1}(x) C_{\rho_1}(x) dx \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial y} C_{i_2}(y) \frac{\partial}{\partial y} C_{\rho_2}(y) dy \int_{-1}^1 C_{i_3}(z) C_{\rho_3}(z) dz + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 C_{i_1}(x) C_{\rho_1}(x) dx \int_{-1}^1 C_{i_2}(y) C_{\rho_2}(y) dy \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} C_{i_3}(z) \frac{\partial}{\partial z} C_{\rho_3}(z) dz \right).
\end{aligned}$$

Воспользуемся квадратурными формулами Гаусса. Получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{J=1}^N \omega_J \frac{\partial}{\partial x^J} C_{i_1}(x^J) \frac{\partial}{\partial x^J} C_{\rho_1}(x^J) \sum_{k=1}^N \omega_k C_{i_2}(y^k) C_{\rho_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l C_{i_3}(z^l) C_{\rho_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{J=1}^N \omega_J C_{i_1}(x^J) C_{\rho_1}(x^J) \sum_{k=1}^N \omega_k \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{\rho_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l C_{i_3}(z^l) C_{\rho_3}(z^l) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{J=1}^N \omega_J C_{i_1}(x^J) C_{\rho_1}(x^J) \sum_{k=1}^N \omega_k C_{i_2}(y^k) C_{\rho_2}(y^k) \sum_{l=1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{\rho_3}(z^l) \right) = \\
&= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{J=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_J \omega_k \omega_l \frac{\partial}{\partial x^J} C_{i_1}(x^J) \frac{\partial}{\partial x^J} C_{\rho_1}(x^J) C_{i_2}(y^k) C_{\rho_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{\rho_3}(z^l) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \Big) = \\
& = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_j \omega_k \omega_l \left(\frac{\partial}{\partial x^j} C_{i_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} C_{p_1}(x^j) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \right. \\
& \quad + C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) C_{i_3}(z^l) C_{p_3}(z^l) + \\
& \quad \left. C_{i_1}(x^j) C_{p_1}(x^j) C_{i_2}(y^k) C_{p_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \right) = \\
& = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \sum_{i_3=1}^N U_{i_1 i_2 i_3} \left(\sum_{j=1}^N \omega_j \frac{\partial}{\partial x^j} C_{i_1}(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j} C_{p_1}(x^j) \delta_{i_2, p_2} \omega_{i_2} \delta_{i_3, p_3} \omega_{i_3} + \right. \\
& \quad + \sum_{k=1}^N \omega_k \frac{\partial}{\partial y^k} C_{i_2}(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} C_{p_2}(y^k) \delta_{i_1, p_1} \omega_{i_1} \delta_{i_3, p_3} \omega_{i_3} + \\
& \quad \left. \sum_{l=1}^N \omega_l \frac{\partial}{\partial z^l} C_{i_3}(z^l) \frac{\partial}{\partial z^l} C_{p_3}(z^l) \delta_{i_1, p_1} \omega_{i_1} \delta_{i_2, p_2} \omega_{i_2} \right). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом преобразуется и правая часть (2.5). Таким образом, используя формулы (2.18), а также меняя индексы p_1, p_2, p_3 , получим матрицу системы и вектор правой части.

2.3 Результаты расчетов

Для оценки точности построенной аппроксимации мы численно проинтегрировали уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 u = 2e^{(x+y)}, \quad (2.19)$$

с аналитическим решением $u(x, y) = e^{(x+y)}$ в области, представляющей прямоугольник: $\bar{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Для оценки влияния на точность решения числа элементов и степени базисных функций мы провели расчеты для степеней базисных функций от 2 до 13 и различного числа элементов. На рис.1. представлена зависимость порядка относительной погрешности аппроксимации при фиксированной степени полинома ($N = 3$) от числа конечных элементов и относительная погрешность аппроксимации, полученная при фиксированном числе конечных элементов (число элементов равно 18), в зависимости от степени полинома. Для оценки влияния точности на размер системы линейных уравнений мы построили график зависимости относительной погрешности аппроксимации от степени полиномов на элементах и числа всех расчетных узлов на разбиении расчетной области (рис.2).

Как видно из рис.1 и рис.2, скорость сходимости по степени полинома является экспоненциальной, и уровень машинной точности достигается при малой степени полинома, в то время как при увеличении числа конечных элементов погрешность также уменьшается, но скорость сходимости ниже, чем соответствующая скорость сходимости, обусловленная увеличением степени полинома. Так, относительная погрешность порядка $1 \cdot 10^{-13}$ достигается при степени полинома $N = 9$, а порядка $4 \cdot 10^{-14}$ - при степени полинома $N = 13$ на сетке, состоящей всего из 18 конечных элементов. С другой стороны, относительная погрешность порядка 10^{-9} достигается при расчёте на сетке, состоящей из 3700 конечных элементов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для получения заданного порядка точности наибольший эффект оказывает повышение степени базисных функций спектральных элементов.

На рис.3а) представлено численное решение задачи (37), а на рис.3б) представлена относительная погрешность аппроксимации задачи (2.19). Следует отметить, что, как при росте степени полинома, так и при росте числа элементов, матрица системы линейных уравнений становится плохо обусловленной, поэтому надлежащий выбор метода решения системы линейных уравнений позволяет ускорить итерационный процесс сходимости. В данной работе мы использовали метод GMRES с предобуславливателем в виде неполного ILU(0) разложения исходной матрицы системы [9].

Результаты сравнения числа итераций, необходимых для сходимости метода, представлены в таблице 1. Из этой таблицы видно, что удачный подбор численного метода решения системы линейных уравнений позволяет существенно ускорить расчёты.

Далее, были проведены расчёты уравнения (2.19) в областях сложной формы. На рис.4а). представлена область интегрирования Ω задачи (2.19), покрытая сеткой, состоящей из 71 четырёхугольного элемента. Изложенный выше спектральный метод позволяет находить решения с высоким порядком точности для областей с нетривиальной геометрией. На рис.4б) представлено численное решение задачи (2.19), а на рис.4в) – относительная погрешность аппроксимации.

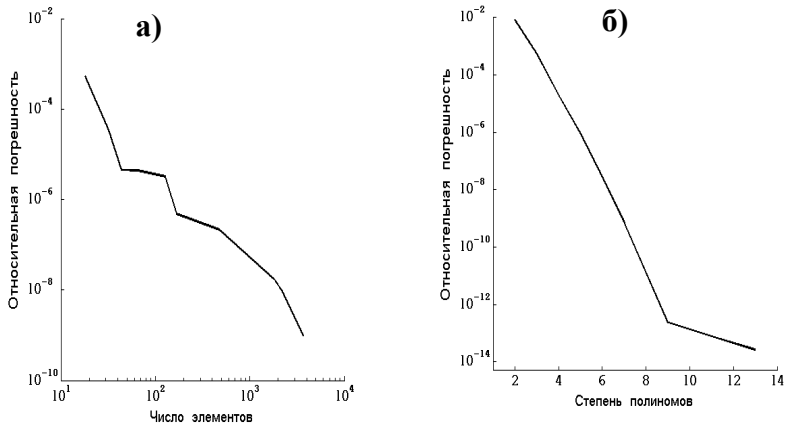


Рис. 1. Зависимость порядка относительной погрешности аппроксимации от степени полинома и числа спектральных элементов.

а) При фиксированной степени полинома $N = 3$ от числа конечных элементов.

б) При фиксированном числе элементов от степени полиномов (18 элементов).

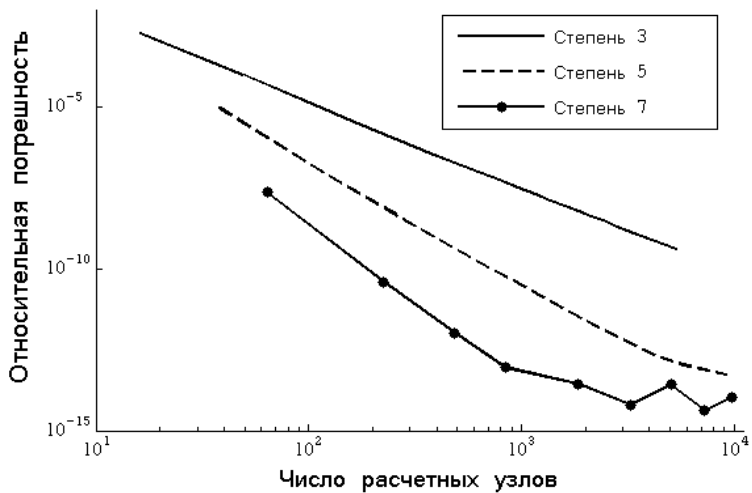


Рис. 2. Зависимость относительной погрешности аппроксимации от степени полиномов на элементах и числа всех расчетных узлов на разбиении расчетной области.

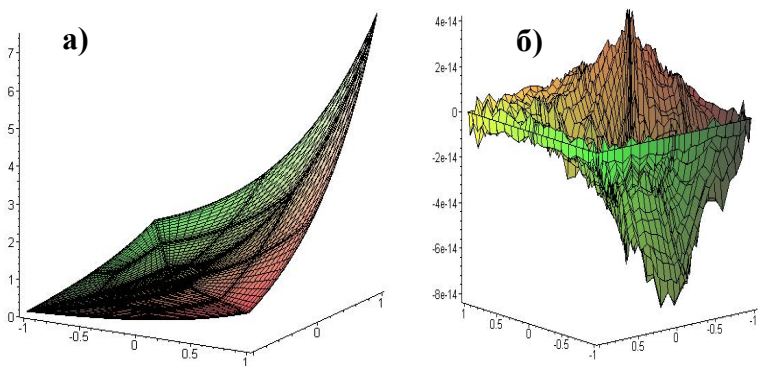
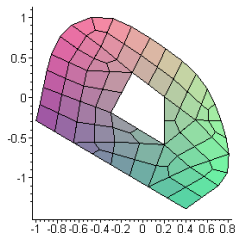


Рис. 3. Численное решение задачи (2.19):

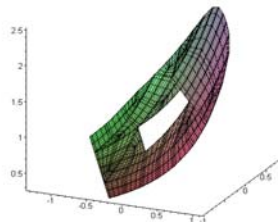
а) Численное решение.

б) Относительная погрешность при степени полинома $N = 13$ для 18 элементов.

а)



б)



в)

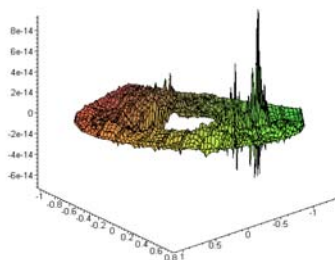


Рис.4. Решение задачи (2.19) в области сложной формы с вырезом:
а) Область интегрирования, покрытая четырехугольными элементами.
б) Приближенное решение.
в) Относительная погрешность численного решения для полиномов степени 7 на 71 конечном элементе.

2.4 Задачи

1. Произвести расчет уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями Дирихле, в области, представляющей собой квадрат со стороной 1. Наивысшую степень аппроксимирующих полиномов положить равной 3, 5, 7, 9. Число конечных элементов – 1. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом Гаусса-Зейделя.
2. Произвести расчет уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями Дирихле, в области, представляющей собой квадрат со стороной 1. Наивысшую степень аппроксимирующих полиномов положить равной 3. Число конечных элементов – 5, 10, 15, 25, 50. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом сопряженных градиентов совместно с неполной LU-факторизацией.
3. Произвести расчет уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями Дирихле, в области, представляющей собой квадрат со стороной 1. Наивысшую степень аппроксимирующих полиномов положить равной 3, 5, 7. Число конечных элементов – 5, 10, 15, 25, 50. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом обобщенных невязок совместно с неполной LU-факторизацией.
4. Произвести расчет уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями Дирихле, в области, представляющей собой куб со стороной 1. Наивысшую степень аппроксимирующих полиномов положить равной 3, 5, 7. Число конечных элементов – 5, 10, 15, 25, 50. Систему линейных алгебраических уравнений решить методом обобщенных невязок совместно с неполной LU-факторизацией.

ГЛАВА 3. Метод спектральных элементов для решения плоских задач динамики вязкой жидкости на неразнесенных неструктурированных сетках

3.1 Несжимаемые вязкие течения. Математическая постановка задачи

Уравнения, описывающие двумерные стационарные несжимаемые ламинарные течения имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(u^T u) - \frac{1}{Re} \Delta u = -\nabla p \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) можно переписать в координатном виде следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, i = 1, 2, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь j - индекс суммирования, $Re = \frac{UL}{\nu}$ - число Рейнольдса, U ,

L - характерная скорость и характерный линейный размер соответственно, ν - кинематическая вязкость, $u = (u_1, u_2)$ - векторная функция, представляющая скорость жидкости в плоском сечении, p - скалярная функция давления жидкости.

3.2 Метод проекций

Для численного решения уравнений (3.1) применили метод установления совместно с широко известным методом проекций [2]. Суть этого метода состоит в следующем:

1. На первом этапе находим промежуточное значение для скорости из уравнения

$$\frac{\tilde{u} - u^n}{\Delta t} - \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u} = (u^n \cdot \nabla) u^n . \quad (3.3)$$

2. На втором этапе производим расчет давления по формуле

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \tilde{u} . \quad (3.4)$$

3. На третьем этапе производим расчет скорости для временного слоя $n + 1$ следующим образом:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} . \quad (3.4)$$

Шаги 1 – 3 выполняются до установления решения.

3.3 Результаты расчетов

Сопоставление результатов с известным аналитическим решением

Для того, чтобы показать спектральную скорость сходимости численного алгоритма, рассмотрим течение Коважного [9]. Течение Коважного является точным решением плоских стационарных уравнений вязкой жидкости, т.е. плоских уравнений Навье – Стокса и имеет следующий вид:

$$u(x, y) = 1 - e^{(-\lambda x)} \cos(2\pi y),$$

$$v(x, y) = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\lambda x} \sin(2\pi y), \quad (3.5)$$

$$p(x, y) = -\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} .$$

Параметр λ , в свою очередь, определяется следующим

соотношением: $\lambda = \sqrt{\frac{Re^2}{4} + 4\pi^2} - \frac{Re}{2}$. Численное решение было

найдено в области прямоугольной формы $[-0.5, 1] \times [-0.5, 1.5]$.

Граничные условия задавали согласно аналитическим формулам (3.5). Расчеты велись для числа Рейнольдса, равного 40, на сетке,

состоящей из 81 конечного элемента. Относительные погрешности для компонент скоростей, давления, а так же невязка уравнения неразрывности показана на рис. 1. Из рис. 1 видно, что скорость сходимости приближенного решения к точному носит экспоненциальный характер.

В таблице 1 приведены результаты сравнения эффективности применения различных итерационных методов для расчета систем линейных алгебраических уравнений, получающихся при дискретизации уравнений (3.3) – (3.5). Следует отметить, что временные затраты на одну итерацию методом GMRES превосходили на 30% временные затраты на одну итерацию методом сопряженных градиентов. Одна итерация методом Гаусса-Зейделя примерно в 4 раза быстрее итерации метода сопряженных градиентов. Из таблицы 1 видно, что наиболее эффективно использовать метод GMRES совместно с неполной LU-факторизацией.

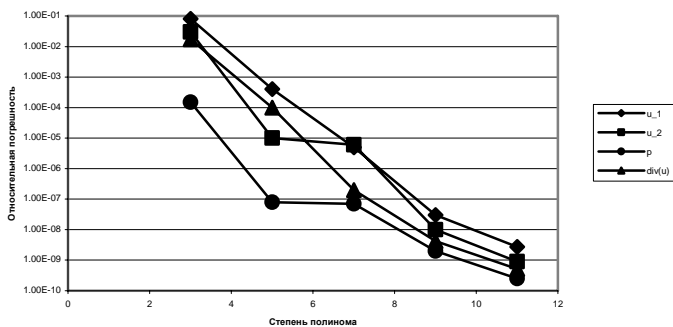


Рис. 1. Относительные погрешности расчетов для компонент скоростей, давления и невязка для уравнения неразрывности

Степень полинома	Число итераций, необходимое для сходимости метода				
	Гаусс-Зейдель	BICGStab	BICGStab + ILU(0)	GMRES	GMRES + ILU(0)
3	650	420	120	250	48
5	2100	1150	350	440	110
7	6700	1620	510	580	156
9	21000	2350	740	890	241
11	37400	4300	1050	1100	357

Таб. 1. Оценка эффективности применения различных итерационных методов для расчета систем линейных уравнений, получающихся при дискретизации уравнения (3.3) методом спектральных элементов

Расчет течения в плоской каверне

Рассмотрим двумерную полость, представляющую собой область квадратной формы с длиной грани $l = 1$. Нижняя и боковые грани являются твердыми стенками, верхняя грань является подвижной стенкой, перемещающейся с постоянной скоростью. Граничные условия для данной задачи задавались следующим образом:

$$u = 0 \quad \text{на твердых неподвижных стенках,}$$

$$u_1 = 1, u_2 = 0 \quad \text{на подвижной стенке,}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{на всех границах.}$$

Число Рейнольдса связано с физическими параметрами задачи

следующей формулой $Re = \frac{Ul}{\nu}$, где U - размерная скорость

перемещения подвижной границы. В таблице 2 приведены результаты расчетов минимального значения функции тока для течения при числе Рейнольдса 400. Сравнение с данными других авторов показывает достоверность данного подхода к аппроксимации уравнений Навье-Стокса.

Эксперимент	Минимум функции тока ψ_{min}
225 конечных элементов, степень полинома 3	-0.111
данные работы [10]	-0.11068
данные работы [11]	-0.114
данные работы [12]	-0.108

Таб. 2. Сравнение минимального значения функции тока в двумерной полости при числе $Re = 400$.

На рис. 2 приведены линии тока для чисел Рейнольдса 400 и 1000. Результаты для числа Рейнольдса, равного 1000, можно сравнить, например, с данными работы [10].

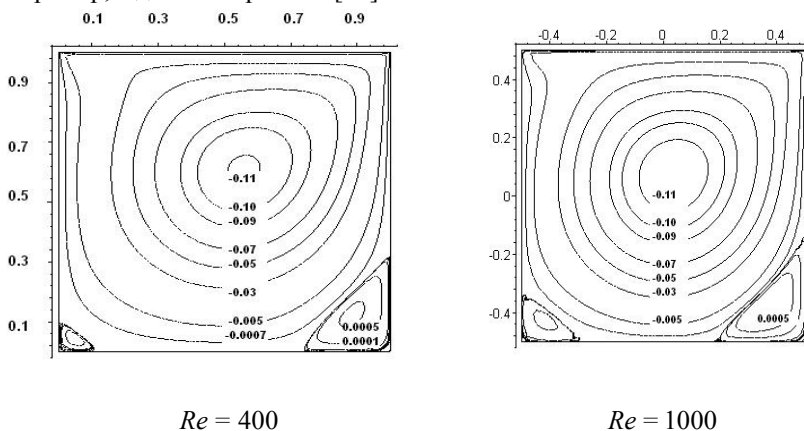


Рис. 2. Линии тока в каверне при $Re = 400$ и $Re = 1000$.

На рис. 3 приведены линии тока для числа Рейнольдса, равного 1800.

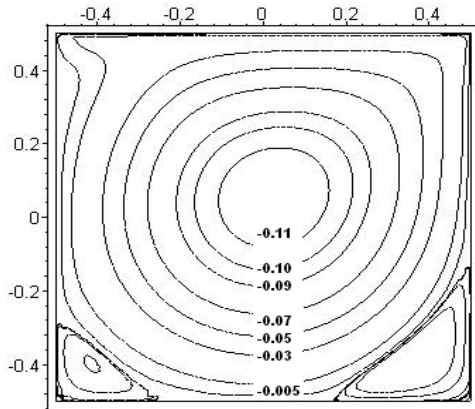


Рис. 3. Линии тока в камере при $Re = 1800$

На рис. 4 - 5 представлены профили продольной и поперечной компонент скоростей на вертикальной и горизонтальной центральных линиях при различных числах Рейнольдса.

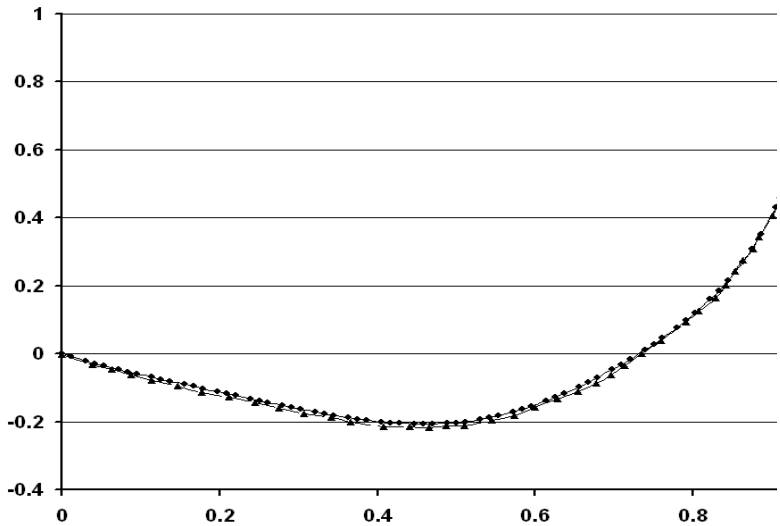


Рис. 4. Сравнение расчета двумерного распределения продольной компоненты скорости при $Re = 100$, выполненного с помощью метода спектральных элементов, с расчетом работы [13].

Стационарное течение за уступом.

Рассмотрим область, представляющую собой канал с уступом. Пусть L - длина канала за уступом, d - диаметр входного сечения, а также высота уступа, D - диаметр канала за уступом.

Граничные условия задаются следующим образом. На входе течение считается установившимся, поэтому первая компонента скорости имеет параболический профиль, а вторая компонента скорости тождественно равна нулю. Проинтегрировав уравнение Пуассона для продольной компоненты скорости по диаметру входного сечения, в предположении что отсутствуют продольные изменения рассматриваемой величины, получим следующее граничное условие для первой компоненты скорости:

$$u_1(0, y) = Re \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{l_1 + l_2}{2} y + \frac{l_1 l_2}{2} \right).$$

где $\frac{\partial P}{\partial x}$ - заданный и постоянный градиент давления,

$Re = U2d / \nu$ - число Рейнольдса, U - средняя скорость на входе, l_1, l_2 - пределы интегрирования входного сечения в направлении y . Граничное условие на входе для второй компоненты скорости задается следующим образом:

$$u_2(0, y) = 0.$$

Граничные условия для давления на входе задаются следующим образом:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -a,$$

где a некоторая положительная константа.

На выходе течение также считается установившимся, граничные условия задаются по формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0,$$

$$p(x, y) = 0.$$

На твердых стенках для скорости ставится условия прилипания, а также однородные условия Неймана для давления:

$$u(x, y) = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Часть расчетной области с сеткой, состоящей из четырехугольников, представлена на рис. 2. Отметим, что линейный размер L составлял $20d$.

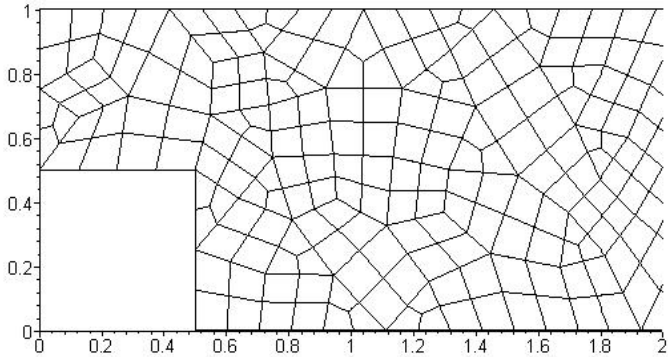


Рис. 7. Область расчета стационарного потока за уступом, покрытая расчетной сеткой

Были проведены расчеты для чисел Рейнольдса 100, 200, 300, 400. Степень полинома равнялась 3, а число конечных элементов не превышало 3 000. За уступом формируется глобальный вихрь, продольный размер которого l увеличивается с ростом числа Рейнольдса. В таблице 3 представлена зависимость длины большого вихря за уступом от числа Рейнольдса. Здесь следует отметить, что экспериментальные данные для двумерных течений отсутствуют при числах Рейнольдса больше 200.

Эксперимент \ Re	100	200	300	400
l/d данные нашей работы	5.0	7.9	9.8	10.9
l/d данные работы [10]	5.1	7.2	9.5	10.4
l/d данные работы [12]	-	-	9.0	10.0
l/d Экспериментальные данные работы [14]	5.0	8.5	-	-
l/d данные работы [15]	5.0	8.2	10	14.8

Таб. 3 Зависимость длины большого вихря за уступом от числа

Re .

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. – М.: Мир, 1991.
3. John P. Boyd. Chebyshev and Fourier Spectral Methods. Second Edition, University of Michigan, 2000.
4. F.N. van de Vosse. Spectral Element Methods: theory and application, 1999.
5. Patera, A. T.: 1984. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion, *Journal of Computational Physics* 54, 468–488.
6. Orszag, S. A.: 1980, Spectral methods for problems in complex geometries, *Journal of Computational Physics* 37, 70–92.
7. А. М. Бубенчиков, В.С. Попонин, Д.К. Фирсов. Спектральный метод решения плоских краевых задач на неструктурированной сетке // Математическое моделирование, 2007, том 19, №10, с. 3. – 14.
8. Yousef Saad. Iterative Methods for Sparse Linear Systems 2000.
9. В.Т. Helenbrook. A Two-Fluid Spectral Element Method. Department of Mechanical and aeronautical engineering, 1999.
10. Бубенчиков А.М., Фирсов Д.К., Котовщикова М.А. Численное решение плоских задач динамики вязкой жидкости методом контрольных объемов на треугольных сетках // Математическое моделирование. 2007, т. 19, № 4
11. S. Ozawa, Numerical studies of steady flow in a two-dimensional square cavity at high Reynolds numbers // J. Phys. Soc. Jpn 1975, V 38, p.889.
12. D. C. Wan, B. S. V. Patnaik, and G. W. Wei Discrete Singular Convolution–Finite Subdomain Method for the Solution of Incompressible Viscous Flows // Journal of Computational Physics 2002, V. 180, p. 229-255.
13. Junk M, Rao S. A new discrete velocity method for Navier-Stokes equations // Journal of computational physics, 1999, 155, p. 178-198.
14. B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira, and B. Schönung. Experimental and theoretical investigation of backward-facing

step flow // J. Fluid Mech. 1983, V. 127, № 473.

15. Т. Г. Елизарова, В. В. Серегин. Аппроксимация квазидинамических уравнений на треугольных сетках // Вестник Московского Университета, серия 3. Физика. Астрономия, 2005. № 4, с. 15-18.