

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Национальный исследовательский
Томский государственный университет

ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

**Сборник статей Всероссийской молодежной научной
конференции, посвященной 85-летию со дня рождения
Заслуженного деятеля науки Российской Федерации,
профессора Гришина Анатолия Михайловича**

г. Томск, 21–24 мая 2024 г.

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Томск – 2024

УДК 51; 531/534
В 84

В 84 **Все грани математики и механики** : сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения Заслуженного деятеля науки Российской Федерации, профессора Гришина Анатолия Михайловича, г. Томск, 21–24 мая 2024 г. – Томск : STT, 2024. – 164 с.

ISBN 978-5-93629-712-0

В сборнике представлены статьи участников Всероссийской молодежной научной конференции «Все грани математики и механики», посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач.

Для студентов, аспирантов и молодых ученых.

УДК 51; 531/534

Опубликовано в авторской редакции.

Конференция и издание сборника поддержаны Региональным научно-образовательным математическим центром Томского государственного университета за счет средств субсидии в целях оказания федеральным государственным учреждениям дополнительной государственной поддержки (соглашение № 075-02-2024-1437).

ISBN 978-5-93629-712-0

© Авторы, 2024
© Томский государственный университет, 2024
© Оформление, макет, STT™, 2024

Организаторы:

Национальный исследовательский Томский государственный университет; механико-математический факультет НИ ТГУ;
Региональный научно-образовательный математический центр (НОМЦ) НИ ТГУ.

Редакционная коллегия:

- Гензе Л.В. – канд. ф.-м. н., декан ММФ,
директор НОМЦ НИ ТГУ;
Касымов Д.П. – канд. ф.-м. н., доцент ММФ НИ ТГУ.

Организационный комитет конференции:

- Касымов Д.П. – канд. ф.-м. н., зам. декана ММФ
НИ ТГУ (председатель);
Барт А.А. – канд. ф.-м. н., вед. инженер ММФ НИ ТГУ
(заместитель председателя);
Голубничий Е.Н. – студент ММФ НИ ТГУ (ответ. секретарь);
Мукаева Д.Р. – студент ММФ НИ ТГУ;
Сомова П.А. – студент ММФ НИ ТГУ;
Старосельцева А.А. – студент ММФ НИ ТГУ;
Руссо В.Д. – студент ММФ НИ ТГУ;
Челнокова А.С. – мл. науч. сотр. ММФ НИ ТГУ.

УДК 536.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ЗЛОКАЧЕСТВЕННОЕ НОВООБРАЗОВАНИЕ МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ

Д.В. Акулова, М.А. Шеремет

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: nobelsofi@gmail.com

Аннотация. В исследовании предлагается метод, основанный на непрерывном воздействии тепла на поверхность кожи с последующим расчетом степени разрушения тканей при помощи интеграла Аррениуса. Для моделирования теплового воздействия использовалась модель Пеннеса.

Ключевые слова: модель Пеннеса, многослойная биологическая система, процесс гипертермии, математическое моделирование.

Введение. В данной работе рассматривается применение гипертермии в качестве метода лечения злокачественных опухолей, основанного на тепловом воздействии на опухолевые ткани. Повышение температуры в определенной области организма не только наносит вред опухолевым клеткам, но также способствует улучшению кровотока, обеспечивая лучшее поступление кислорода, что повышает эффективность терапии.

В рамках исследования предлагается метод, основанный на непрерывном воздействии тепла на поверхность кожи с последующим расчетом степени разрушения тканей при помощи интеграла Аррениуса [1, 2]. Этот подход обеспечивает более точное управление процессом гипертермии и минимизирует возможные побочные эффекты на окружающие ткани.

Для моделирования теплового воздействия использовалась модель Пеннеса [3], которая описывает процессы теплопереноса в биологических тканях, учитывая их теплопроводность, кровеносный поток и тепловое поглощение метаболическими реакциями.

Постановка задачи. Уравнение теплопроводности для биологических тканей, учитывающее скорость перфузии крови и метаболическое тепловыделение при пространственном нагреве, имеет вид:

$$\rho_{t,m}c_{t,m} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \lambda_m \frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \rho_b c_b \omega_{b,m} (T_a - T_m) + Q_m + Q_r(x, t) \quad (1)$$

где m соответствует биологическому слою: коже ($m = 1$), подкожно-жировой клетчатке ($m = 2$), железистой ткани ($m = 3$), мышечной ткани ($m = 4$) и опухоли ($m = 0$).

$Q_r(x, t) = \eta P_0(t) \exp(-\eta x)$ представляет собой объемный тепловой нагрев, а η – коэффициент ослабления, $P_0(t)$ – временная зависимость мощности нагрева на поверхности ткани [4].

Для оценки термического повреждения ткани в ходе лазерной терапии вводится параметр повреждения Ω , который зависит от интенсивности излучения и продолжительности облучения [5]:

$$\Omega = \ln\left(\frac{C_0}{C_0 - C_d}\right) \quad (2)$$

где C_0 – концентрация белка в неповрежденной ткани, а C_d – концентрация денатурированного белка. При $\Omega = 1$ денатурируется 64% белков, что приводит к необратимым повреждениям.

Математическая оценка теплового повреждения ткани может быть проведена путем вычисления интеграла Аррениуса [1, 2]:

$$\Omega(x) = \int_0^t A_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{RT(\tau, x)}\right) d\tau \quad (3)$$

где A_0 – частота столкновений между молекулами, ΔE – энергия активации реакции денатурации, а R – универсальная газовая постоянная.

Ткань подвергается лазерному воздействию на поверхности в течение определенного времени (см. рис. 1).

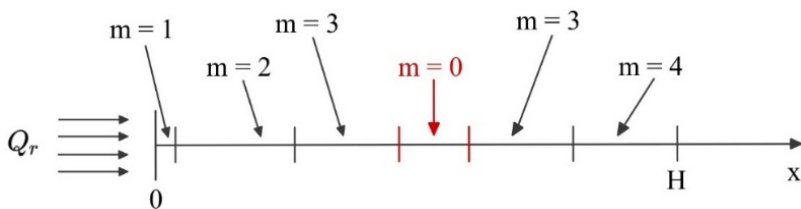


Рис. 1. Схема многослойной биологической ткани, подвергнутой воздействию лазерного излучения

В таблице 1 приведены теплофизические свойства слоев ткани, раковой опухоли и крови, использованные при моделировании [6, 7].

Таблица 1
Теплофизические параметры

| Ткань | H | λ | ρ | c | ω | Q |
|---------|------|-----------|--------|------|----------|--------|
| $m = 1$ | 1.6 | 0.445 | 1200 | 3300 | 0.0013 | 368.1 |
| $m = 2$ | 5.0 | 0.185 | 1000 | 2674 | 0.0001 | 368.3 |
| $m = 3$ | 43.4 | 0.480 | 1080 | 3000 | 0.00018 | 450.0 |
| $m = 4$ | 15.0 | 0.510 | 1085 | 3800 | 0.0027 | 684.0 |
| $m = 0$ | — | 0.480 | 1080 | 3500 | 0.0090 | 7767.4 |
| Кровь | — | — | 1060 | 3770 | — | — |

Результаты.

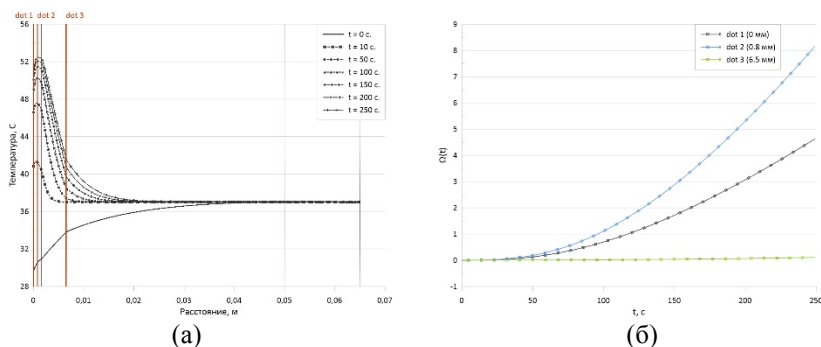
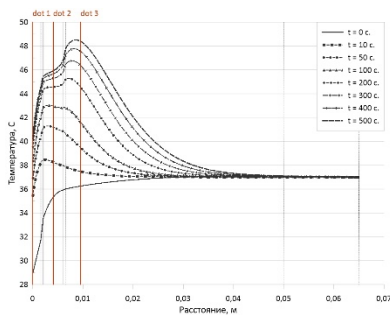
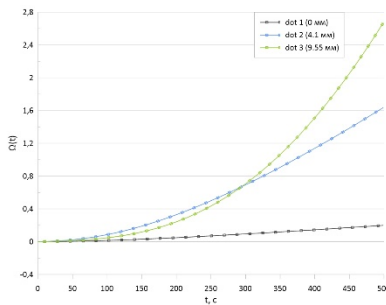


Рис. 2. Раковая опухоль расположена в 1-м слое, диаметр опухоли 1.5 мм: (а) профили температуры в разные моменты времени при $\eta = 1500$; (б) временная зависимость для интеграла Аррениуса в точках dot 1, dot 2, dot 3

На рисунке 2 моделируется воздействие лазерного облучения на поверхность тела при расположении раковой опухоли в первом слое ткани. Опухоль, диаметром 1.5 мм, практически полностью занимает слой кожи. График (а) показывает изменения температуры в разные моменты времени, а также разделение биологических слоев и расположение опухоли. График (б) отображает изменение интеграла Аррениуса во времени в точках, где он рассчитывается. В точке dot 2, в центре опухоли, значение интеграла превышает 1 после 100 секунд воздействия, что указывает на начало необратимых повреждений в центре опухоли.

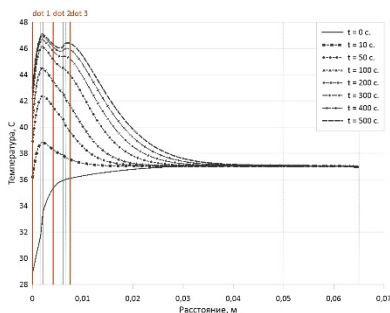


(a)

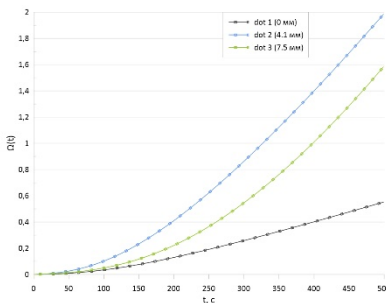


(б)

Рис. 3. Раковая опухоль расположена во 2-м слое, диаметр опухоли 4 мм:
(а) профили температуры в разные моменты времени при $\eta = 200$; (б) временная зависимость для интеграла Аррениуса в точках dot 1, dot 2, dot 3



(a)



(б)

Рис. 4. Раковая опухоль расположена во 2-м слое, диаметр опухоли 4 мм:
(а) Профили температуры в разные моменты времени при $\eta = 300$; (б) временная зависимость для интеграла Аррениуса в точках dot 1, dot 2, dot 3

Рисунки 3 и 4 иллюстрируют тепловое воздействие на опухоль во втором слое с диаметром 4 мм при разных коэффициентах ослабления. Графики (а) показывают распределение температуры в разные моменты времени, а графики (б) демонстрируют временную зависимость интеграла Аррениуса. На рисунке 3 при коэффициенте ослабления 200, температура за опухолью повышается, и эта область начинает разрушаться раньше, чем сама опухоль. На рисунке 4, при коэффициенте ослабления 300, температура повышается на левой границе опу-

холи, что вызывает повреждения в данном месте, также могут возникнуть повреждения здоровой ткани перед опухолью.

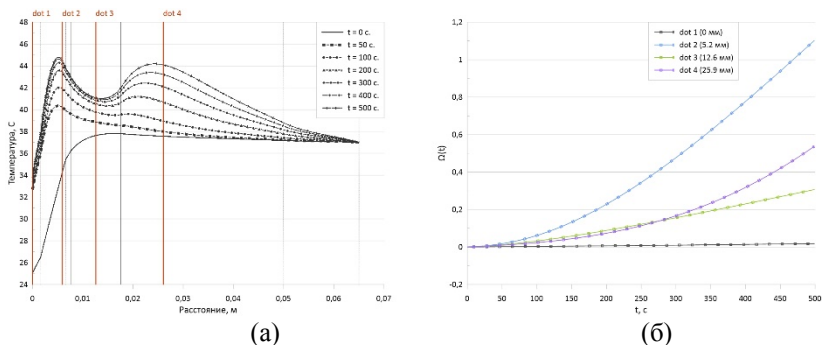


Рис. 5. Раковая опухоль расположена в 3-м слое, диаметр опухоли 10 мм: (а) профили температуры в разные моменты времени при $\eta = 60$; (б) временная зависимость для интеграла Аррениуса в точках dot 1, dot 2, dot 3, dot 4

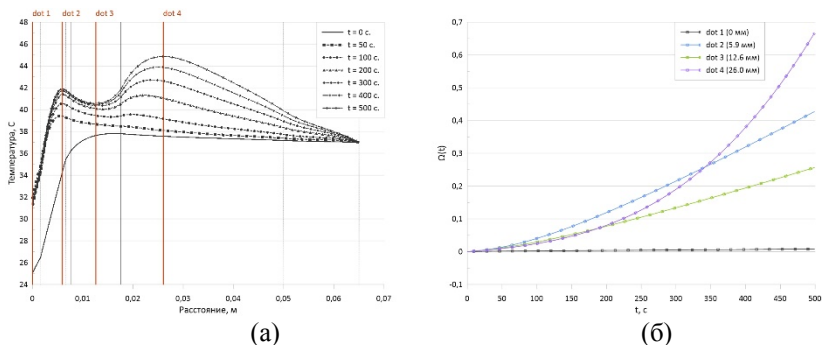


Рис. 6. Раковая опухоль расположена в 3-м слое, диаметр опухоли 10 мм: (а) профили температуры в разные моменты времени при $\eta = 60$; (б) временная зависимость для интеграла Аррениуса в точках dot 1, dot 2, dot 3, dot 4

Рисунки 5 и 6 показывают моделирование теплового воздействия при расположении опухоли в третьем слое с диаметром 10 мм и разными коэффициентами ослабления. Графики (а) и (б) показывают аналогичные тенденции, с сильным повышением температуры перед и после опухоли, а также более значительным разрушением соседних тканей перед и за опухолью.

Заключение. Было обнаружено, что наилучший эффект воздействия пространственного нагрева наблюдается при расположении раковой опухоли близко к поверхности тела. Также установлено, что с увеличением коэффициента ослабления наблюдается повышение температуры в слоях ткани, расположенных ближе к поверхности, в то время как с уменьшением коэффициента тепло распространяется на более глубокие слои ткани, что приводит к повышению температуры в них.

Список литературы

1. Mahesh N., Singh N., Talukdar P. Investigation of a breast cancer magnetic hyperthermia through mathematical modeling of intratumoral nanoparticle distribution and temperature elevations // J. Thermal Science and Engineering Progress. – 2023. – Vol. 40. – Art. No. 101756.
2. Lobato F.S., Filho J.E.A., Libotte G.B. et al. Optimizing breast cancer treatment using hyperthermia: A single and multi-objective optimal control approach // J. Appl. Math. Modell. – 2024. – Vol. 127. – P. 96–118.
3. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. – 1948. – Vol. 1(2). – P. 93–122.
4. Deng Z.S., Liu J. Analytical study on bioheat transfer problems with spatial or transient heating on skin surface or inside biological bodies // J. Biomech. Eng. – 2002 Dec. – Vol. 124(6). – P. 638–649.
5. Khosravirad A., Ayani M.B. Comparative analysis of thermal damage to laser-irradiated breast tumor based on Fourier conduction and non-Fourier heat conduction models: A numerical study // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2023. – Vol. 145 (A). – Art. No. 106837.
6. Figueiredo A.A.A., Fernandes H.C., Malheiros F.C. et al. Influence analysis of thermophysical properties on temperature profiles on the breast skin surface // Int. Comm. Heat Mass Transfer. – 2020. – Vol. 111. – Art. No. 104453.
7. Bezerra L.A., Ribeiro R.R., Lyra P.R.M. et al. An empirical correlation to estimate thermal properties of the breast and of the breast nodule using thermographic images and optimization techniques // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2020. – Vol. 149. – Art. No. 119215.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL EFFECTS ON MALIGNANT NEOPLASM OF THE BREAST

D.V. Akulova, M.A. Sheremet

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: nobelsofi@gmail.com

Abstract. The study proposes a method based on the continuous exposure of heat to the surface of the skin, followed by the calculation of the degree of tissue destruction using the Arrhenius integral. This approach provides more precise control of the hyperthermia process and minimizes possible side effects on surrounding tissues. To

simulate the thermal effect, the Pennes model was used, which describes the processes of heat transfer in biological tissues, taking into account their thermal conductivity, blood flow and thermal absorption by metabolic reactions.

Keywords: Pennes model, multilayer biological system, hyperthermia process, mathematical modeling.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ СТРИТЕРА–ФЕЛПСА, МОНО, ДОББИНСА–ДРИСНЕКА И КЕМПА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ БИОФИЛЬТРОВ

А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

Аннотация. Рассматривается двумерная модификация моделей Стритера–Фелпса, Моно, Доббинса–Дриснека и Кемпа, описывающая процесс самоочищения, с учетом влияния процесса аэрации, окисления субстрата кислородом, микроорганизмов и потока загрязнений, вымываемых из донных отложений, без использования и с использованием капельного и высоконагружаемого биофильтров.

Ключевые слова: биофильтр, модель, численная реализация, неявная схема, дефицит кислорода, органическое вещество.

Введение. Рассматривается участок реки Томь длиной 20 км и шириной 0,8 км. Русло реки представляет собой канал прямоугольной формы, по которому течет идеальная несжимаемая жидкость. Сброс в реку Томь органического вещества происходит в течении двух суток, начиная с 0,5 сут.

При численной реализации математической модели используется явный разностный метод. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости численного метода [1].

Математическая постановка задачи. Сравниваются результаты слива органического вещества по оси ординат (по ширине реки) и по оси абсцисс (по длине участка реки). Приведем математическую постановку задачи для первого случая.

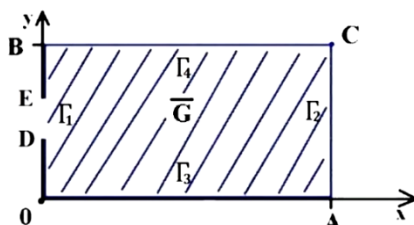


Рис. 1. Расчетная область

Вводятся следующие обозначения:

$$\mathbf{W} = (L, X, D)^T, \mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)^T, S_1 = -k_1 L - k_3 L - kL - \frac{\mu_{\max} XL}{Y(K_L + L)} + J_B,$$

$$S_2 = \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L}, S_3 = k_1 L - k_2 D - \frac{\mu_{\max} XL}{K_L + L} + J_1 + J_2 - J_3.$$

В области

$$\bar{G} = G \cup \Gamma, G = \{(x, y) | 0 < x < A, 0 < y < B\}, t \in [0, T];$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \Gamma_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_1^{(3)},$$

где

$$\Gamma_1^{(1)} = \{(x, y) | x = 0, 0 \leq y < D\}, \Gamma_1^{(2)} = \{(x, y) | x = 0, D \leq y \leq E\},$$

$$\Gamma_1^{(3)} = \{(x, y) | x = 0, E < y \leq B\}; \Gamma_2 = \{(x, y) | x = A, A < y < C\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) | 0 < x \leq A, y = 0\}, \Gamma_4 = \{(x, y) | B < x \leq C, y = B\}$$

ищется решение $\mathbf{W} \in C_1^{2,2}(\bar{G})$ исходной задачи, удовлетворяющее уравнению в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + U \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} + V \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} = \mathbf{S} + D_f \left(\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

с соответствующим начальным

$$\mathbf{W}(x, y, 0) = \mathbf{W}^0(x, y), (x, y) \in \bar{G} \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \mathbf{W}(0, y, t)}{\partial x} = \mathbf{W}^{left}, y \in \Gamma_1, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}(A, y, t)}{\partial x} = \bar{0}, y \in \Gamma_2, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}(x, 0, t)}{\partial y} = \bar{0}, x \in \Gamma_3, 0 < t \leq T;$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}(x, B, t)}{\partial y} = \bar{0}, x \in \Gamma_4, 0 < t \leq T; \quad (3)$$

где

$$\mathbf{W}^0(x, y) = (0, 0, 2; 1; 0)^T,$$

$$\mathbf{W}^{left} = \begin{cases} L(0, y, t) = 0, 619, y \in \Gamma_1^{(2)}, 0, 5 < t \leq 2, 5; \\ \bar{0}. \end{cases}$$

k – константа скорости изъятия органического вещества (в качестве очистного сооружения используются капельный и высоконагружаемый биофильтры [2]). Смысл остальных обозначений приведен в [3].

Анализ влияния биофильтров. Рассмотрим случай двух источников загрязнения, причем слив происходит по ширине участка. Сброс органического вещества поступает с первого слива с момента времени $t=0,5$ сут до 1,5 сут и со второго – с 1,5 сут до 2,5 сут. За это время загрязнение со скоростью 28,512 км/сут распространяется по участку реки. Самое высокое значение концентрации органики наблюдается в месте слива и равно 0,619 мг/л. По мере удаления от источника загрязнения концентрация уменьшается за счет влияния скорости течения реки, процессов окисления субстрата кислородом, поедания субстрата микроорганизмами, удаления загрязнения путем осаждения на дно.

На рис. 2 приводится график изменения L , X D в моменты времени 1, 2.5 и 4.4 сут. На момент времени $t=2.5$ сут видно, что загрязнение распространилось по всему участку. После прекращения поступления органического вещества концентрация субстрата падает и достигает значения 0,025 мг/л к моменту времени $t=4,4$ сут.

На протяжении 2,5 сут наблюдается рост концентрации биомассы микроорганизмов X , причем наибольшие значения расположены в местах сброса. Это можно объяснить тем, что в этих местах более высокие значения концентрации субстрата, что способствует росту биомассы микроорганизмов. После прекращения подачи субстрата ($t=2.5$) значение концентрации X продолжает расти, достигая практически одинакового значения (1,27 мг/л) на всем рассматриваемом участке к 4,4 сут.

Кроме того, за 2,5 сут дефицит кислорода возрастает и при этом наименьшие значения расположены в местах сброса. Это связано с расположением в этих местах наибольших концентраций микроорганизмов, которые поглощают органическое вещество, тем самым способствуя меньшему расходу кислорода. После прекращения подачи загрязнения наблюдается рост дефицита кислорода до 0,095 мг/л на протяжении 4,4 сут.

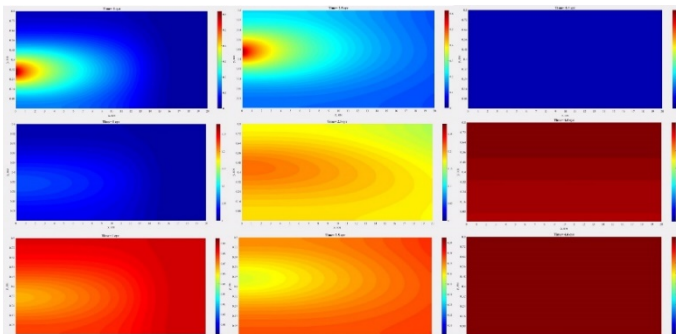


Рис. 2. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) без использования биофильтра (слив по ширине участка)

На рис. 3 (случай использования капельного биофильтра) видно, что область распространения L меньше, чем на рис. 1, и L достигает значения 0,025 мг/л быстрее, за 2,88 сут. На рисунке видно, что равномерного распределения концентраций L, X и D не наблюдается, так как прошло не так много времени с окончания сброса загрязнения. К 2,88 сут X достигает максимального значения 1,12 мг/л, что меньше предыдущего значения (1,27 мг/л). В случае D максимальное значение равно 0,097 мг/л, что немного больше прошлого значения в 0,095 мг/л.

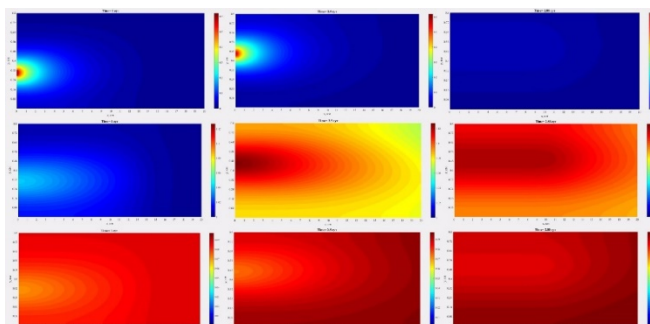


Рис. 3. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) с использованием капельного биофильтра (слив по ширине участка)

На рис. 4 (случай использования высоконагружаемого биофильтра) видно, что область распространения L является наименьшей, время очистки – 2,75 сут. Максимальное значение X – 1,1 мг/л (наименьшее значение), а максимальное значение D – 0,098 мг/л (самое большое).

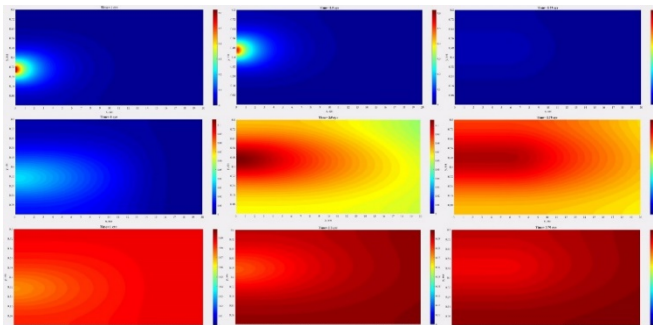


Рис. 4. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) с использованием высоконагружаемого биофильтра (слив по ширине участка)

Далее рассмотрим случай, когда органическое вещество сбрасывается по длине участка реки.

На рис. 5 рассматривается процесс самоочищения (т.е. без использования биофильтра). Процесс самоочищения аналогичен случаю, представленному на рис. 1, но область распространения загрязнения меньше, что объясняется тем, что боковая скорость много меньше скорости течения реки. L достигает значения 0,025 мг/л к моменту 2,88 сут.

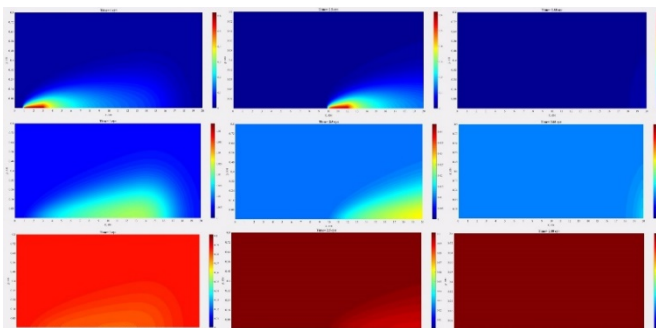


Рис. 5. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) без использования биофильтра (слив по длине участка)

В случаях использования капельного и высоконагружаемого биофильтров графики качественно повторяют процессы, описанные для случая сброса по ширине реки.

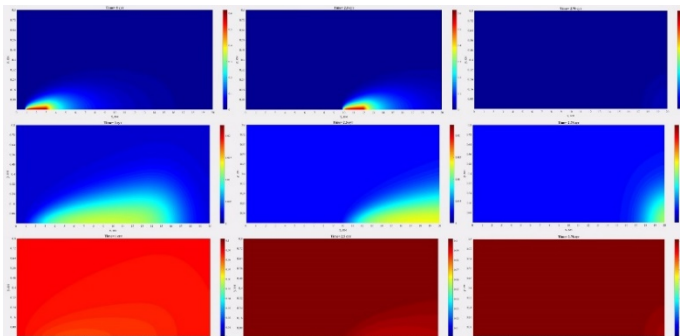


Рис. 6. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) с использованием капельного биофильтра (слив по длине участка)

При использовании капельного биофильтра (рис.6) очистка завершается к моменту времени 2,78 сут, а при использовании высоконагружаемого биофильтра (рис.7) L достигает значения 0,025 мг/л к моменту времени 2,7 сут.

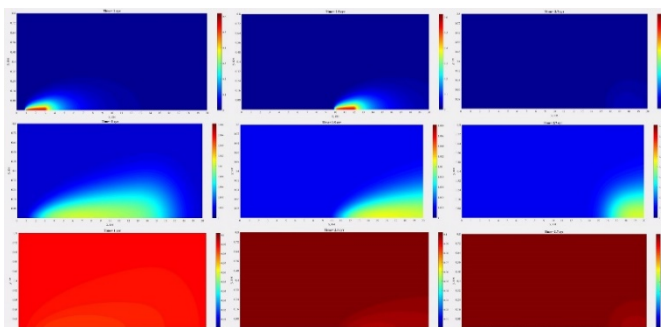


Рис. 7. Распределение концентраций L, X и D (мг/л) с использованием высоконагружаемого биофильтра (слив по длине участка)

Закключение. Применение биофильтров ускоряет очистку поступающего субстрата. Это связано с тем, что концентрация загрязнения, поступающего в Томь, уменьшается за счет биофильтра, скорости течения реки, процессов окисления, поедания органики микроорганизмами и оседания субстрата на дно реки.

В случае сброса органики по ширине участка реки процесс очистки сточных вод в среднем ускоряется в 1,56 раза, в случае сброса по длине участка – в 1,05 раза. Из этого можно сделать вывод, что применение биофильтра предпочтительнее в случае слива по ширине реки.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что высоконагружаемый биофильтр эффективнее капельного в 1,03 раза в случае слива по длине участка и в 1,05 раза в случае сброса по ширине реки.

Список литературы

1. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учебное пособие. – Томск : ТГУ, 2014. – 764 с.
2. Яковлев С.В., Воронов Ю.В. Биологические фильтры. – М. : Стройиздат, 1982. – 121 с.
3. Амзаракова А.В., Михайлов М.Д. Численное моделирование процесса самоочищения сточных вод с применением капельного биофильтра // Все грани математики и механики : сборник тезисов Всероссийской молодежной научной конференции. – Томск, 2023. – С. 15–22.

NUMERICAL STUDY OF MODIFICATION OF STREETER-PHELPS, MONOD, DOBBINS-DRIESNECK AND CAMP MODELS CONSIDERING THE INFLUENCE OF BIOFILTERS

A.V. Amzarakova, M.D. Mikhailov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: nastya.amzarakova.00@mail.ru

Abstract. In the present study, we consider a two-dimensional modification of the Streeter–Phelps, Monod, Dobbins–Driesnek and Camp models is considered, describing the self-purification process, taking into account the influence of the aeration process, oxidation of the substrate with oxygen, microorganisms and the flow of contaminants washed out of bottom sediments, without and with the use of drip and high-load biofilters.

Keywords: biofilter, model, numerical realization, implicit scheme, oxygen deficiency, organic substance.

УДК 519.6.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Р.А. Антинов, А.В. Старченко

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: antinov.rus@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается решение следующей коэффициентной обратной задачи: Дана система линейных уравнений ви-

да: $\sum_j^n a_{i,j} \sigma_j x_j = b_i$, и $\sigma_j > 0$. Коэффициенты $\{a_{i,j}\}$ – известны. Задача

состоит в том, что бы по синтетическим наборам данных $\{\mathbf{b}^n\}$ и $\{\mathbf{x}^n\}$ построить итерационную процедуру для нахождения «неизвестных» значений $\{\sigma\}$. В работе предлагается метод, основанный на алгоритме сопряженных градиентов Флетчера–Ривса. Достоинствами метода Флетчера–Ривса является хорошая скорость сходимости и малый объем памяти необходимый для хранения информации. Для исследования ускорения вычислений использовались технологии параллельного программирования OpenMP и OpenACC.

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, метод сопряженных градиентов, метод Флетчера–Ривса, параллельные вычисления, OpenMP, OpenACC, метод дихотомии.

Введение. Теория обратных задач представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Это связано с необходимостью разработки методов для решения прикладных проблем в различных областях естествознания, связанных с обработкой и интерпретацией наблюдений.

Обратные задачи, как правило, являются некорректно поставленными задачами. Из трёх условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его непрерывная зависимость от исходных данных) в обратных задачах наиболее часто нарушается последнее [1, с.10].

Обратные задачи делятся на коэффициентные обратные задачи (неизвестны коэффициенты уравнения или правая часть уравнения), граничные обратные задачи (неизвестны граничные условия) и эволюционные обратные задачи (неизвестны начальные условия) [2, с. 25].

При численном решении обратных задач широко используются итерационные методы, в том числе и методы сопряженных градиентов [2, с. 459].

Целью данной работы является разработка эффективного метода решения коэффициентной обратной задачи с помощью метода сопряженных градиентов.

Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$\begin{cases} a_{1,1} * \sigma_1 * x_1 + \dots + a_{1,n} * \sigma_n * x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1} * \sigma_1 * x_1 + \dots + a_{n,n} * \sigma_n * x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

В компактном векторно-матричном виде СЛАУ представляется следующим образом: $(A \otimes \sigma)\mathbf{x} = A(\sigma)\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Задачу (1) можно интерпретировать как систему линейных уравнений, появившихся в результате применения метода конечных разностей или метода конечных объемов при решении краевой дифференциальной задачи эллиптического типа с переменными коэффициентами. Принимая в качестве известных величин коэффициенты матрицы и значения σ , а также вектор правых частей \mathbf{b} , (1) можно рассматривать как аналог прямой задачи, суть которой найти значения вектора решения. Для того чтобы существовало единственное решение системы (1) необходимо и достаточно, чтобы $\det(A(\sigma)) \neq 0$. Иначе решения не существует или решений бесконечно много [3, с. 105]. Чтобы определить насколько решение системы чувствительно к изменениям или ошибкам на выходе, нужно посчитать число обусловленности матрицы $A(\sigma)$.

Определение. Число $\mu = \|A(\sigma)\| * \|A(\sigma)^{-1}\|$ называется *числом обусловленности* матрицы коэффициентов A [3, с.108]. Чем больше значение μ , тем сильнее меняется решение при изменении начальных данных. Матрицы с числом обусловленности $\mu \geq 10^3$ называют плохо обусловленными.

Также для системы (1) можно поставить и обратную коэффициентную задачу. А именно требуется, зная коэффициенты матрицы A , \mathbf{b} , и значения \mathbf{x} , предложить итерационную процедуру для поиска σ . Обычно в этом случае строится целевая функция с неотрицательными значениями, для которой последовательно с помощью новых приближений ищется глобальный минимум. Для решения такой обратной задачи для (1) будет использоваться следующая целевая функция:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M (x^{\mu}(\sigma) - x^{*\mu}, x^{\mu}(\sigma) - x^{*\mu}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^M (A(\sigma)^{-1} b^{*\mu} - x^{*\mu}, A(\sigma)^{-1} b^{*\mu} - x^{*\mu}) \end{aligned} \quad (2)$$

Построение численного метода решения задачи. Для решения поставленной выше обратной задачи на основе (1) была разработана итерационная процедура на основе метода сопряженных градиентов. Используется метод Флетчера–Ривса [4, с. 87]. Для расчета расстояния в направлении антиградиента применяется метод дихотомии [5, с. 25] (рис. 1).

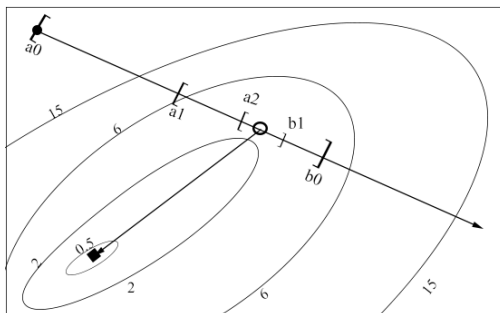


Рис. 1. Определение длины шага с помощью метода дихотомии

Целевая функция имеет вид (2), где $x^{*\mu}$ – «известное приближение» x , а $x^{\mu}(\sigma) = A^{-1}(\sigma) * b^{\mu}$. Так же для вычислений нам потребуется значение градиента этой функции. Воспользуемся формулой:

$$\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_k} = \sum_{\mu=1}^M \left(\frac{\partial x^{\mu}(\sigma)}{\partial \sigma_k}, x^{\mu}(\sigma) - x^{*\mu} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\mu}(\sigma)}{\partial \sigma_k} &= \frac{\partial [A(\sigma)^{-1} \bar{b}^{*\mu}]}{\partial \sigma_k} = \frac{\partial [A(\sigma)^{-1}]}{\partial \sigma_k} \times \bar{b}^{*\mu} = \frac{\partial [A(\sigma)^{-1}]}{\partial \sigma_k} \times A(\sigma) x^{*\mu} = \\ &= -\frac{\partial [A(\sigma)]}{\partial \sigma_k} \times [A(\sigma)]^{-1} x^{*\mu} = -A \times [A(\sigma)]^{-1} \bar{x}^{*\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм решения обратной задачи методом сопряженных градиентов Флетчера–Ривса:

1. Считать матрицу A , $x^{*\mu}$, b^{μ} , $\mu = 1..M$. Задать начальное приближение для $\sigma = 1$.
2. Вычислить $A(\sigma^t)$, проверка $\det(A(\sigma^t)) \neq 0$. Вычислить $A(\sigma^t)^{-1}$.
3. Вычислить $x^{\mu}(\sigma^t) = A^{-1}(\sigma^t) * b^{\mu}$, $\mu = 1..M$.

4. Вычислить $\frac{\partial A(\sigma)}{\partial \sigma_k}$, пользуясь тем, что коэффициенты матрицы $A(\sigma)$ линейно зависят от σ_k .
5. Вычислить $\frac{\partial x^\mu(\sigma)}{\partial \sigma_k}$ по формуле (4).
6. Вычислить градиент целевой функции $\Phi(\sigma^t)$ по σ_k (3).
7. Вычислить значение целевой функции $\Phi(\sigma^t)$ по формуле (2).
8. Методом дихотомии определить оптимальное расстояние в сторону минимума $\Phi(\sigma)$ в направлении $s^t = -\frac{\partial \Phi(\sigma)}{\partial \sigma_k}$:

$$\lambda_{opt}^t = \arg \min_{\lambda} \Phi(\sigma^t + \lambda s^t).$$

9. Вычислить $\sigma^{t+1} = \sigma^t + \lambda_{opt}^t * s^t$.
10. При $t=0$ положить $t=1$ и повторить пункты 2-7.
 11. Вычислить градиент $\Phi(\sigma^{t+1})$ по формуле (2), а также

$$\omega = \frac{\left\| \frac{\partial \Phi(\sigma^{t+1})}{\partial \sigma} \right\|^2}{\left\| \frac{\partial \Phi(\sigma^t)}{\partial \sigma} \right\|^2}.$$

12. Если $\|s^{t+1}\| > \varepsilon$, то $t=t+1$ и перейти к п. 2, иначе остановиться.

Параллельные технологии. В данной работе были предприняты усилия по распараллеливанию предложенного алгоритма решения обратной задачи на многопроцессорной вычислительной системе с общей памятью. Использовались параллельные технологии OpenMP и OpenACC.

OpenMP (от англ. *Open Multi-Processing*) – открытый стандарт для распараллеливания программ на языках Си, Си++ и Фортран. Даёт описание совокупности директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью [6, с. 6].

OpenACC (от англ. *Open Accelerators*) – программный стандарт для параллельного программирования, разрабатываемый совместно компаниями Cray, CAPS, Nvidia и PGI. Стандарт описывает набор директив компилятора, предназначенных для упрощения создания параллельных программ, использующих как центральный, так и *графический процессор* [7, с. 5].

Результаты вычислений. Вычисления проводились на ЭВМ со следующими характеристиками: графический ускоритель Nvidia GTX 1070 и два 6-ядерных процессора Intel(R) Xeon(R) X5675 CPU @3.06GhZ с 24 Гб оперативной памяти.

Численные эксперименты проводились с точностью $\epsilon=10^{-5}$ для всего метода и $\epsilon_{dih}=10^{-5}$ для метода дихотомии, длина начального отрезка в методе дихотомии [0, 5]. Рассматривался случай, в котором размер матрицы $N=60$ и количество наборов данных $M=3540$. Программы разработаны с помощью языка Си. Для компиляции последовательной программы и параллельной с OpenMP применялся *Intel C++ Compiler*. Для версии программы с OpenACC использовался *PGI Compiler*.

Обозначения в таблицах: t – время выполнения программы; p – количество нитей; $S_p = T_{послед} / T_p$ – ускорение параллельной программы; $E_p = S_p / p$ – эффективность использования вычислительных ресурсов.

Таблица 1.

Результаты, полученные с OpenMP $N=60, M=3540$

| p | t | S_p | E_p |
|-----|--------|-------|-------|
| 1 | 38,702 | 1,00 | 1,00 |
| 2 | 20,41 | 1,844 | 0,922 |
| 4 | 11,162 | 3,467 | 0,866 |
| 8 | 6,735 | 5,746 | 0,718 |
| 12 | 5,307 | 7,292 | 0,607 |

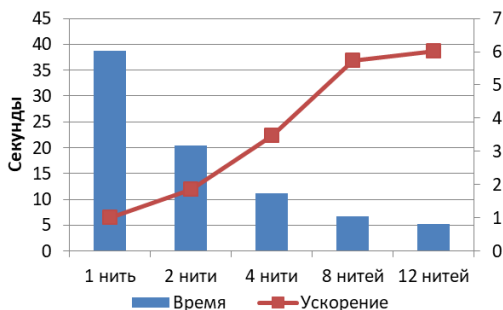


Рис 2. Результаты, полученные с OpenMP $N=60, M=3540$

Таблица 2.

Результаты, полученные с OpenACC N=60, M=3540

| Подход | t | S_p |
|------------------|--------|-------|
| Последовательный | 35,292 | 1,00 |
| OpenACC | 10,327 | 3,417 |

Максимальная абсолютная ошибка MAE для полученных результатов решения обратной задачи равно 10^{-6} .

Заключение. В данной работе получено решение коэффициентной обратной задачи. Для ее решения предлагается метод, основанный на алгоритме сопряженных градиентов Флетчера-Ривса. Достоинствами метода Флетчера-Ривса является хорошая скорость сходимости и малый объем памяти необходимый для хранения информации. Для исследования ускорения вычислений использовались технологии параллельного программирования OpenMP и OpenACC. Изучено влияние начального приближения метода дихотомии на скорость сходимости всей процедуры. Было показано, что узким местом построенной вычислительной процедуры является метод дихотомии для поиска оптимального шага в направлении антиградиента.

Список литературы

1. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач : учеб. пособие. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособие. – Изд. 3-е. – М. : Издательство ЛКИ, 2009. – 480 с.
3. Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений: учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп.; под ред. А.В. Старченко. – Томск : ТГУ, 2014. – 746 с.
4. Северин В.П. Методы многомерной безусловной минимизации : учеб. пособие по курсу «Методы оптимизации». – Харьков : НТУ «ХПИ», 2013. – 160 с. – На русск. яз.
5. Прокопенко Н.Ю. Методы оптимизации : учеб. пособие. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 118 с.
6. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP : учеб. пособие. – М. : Изд-во МГУ, 2009. – 77 с.
7. Романенко А.А. Особенности адаптации программ под GPU с использованием технологии OpenACC : учеб. пособие. – Новосибирск : НГУ, 2016. – 33 с.

NUMERICAL SOLUTION OF ONE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM
USING THE ITERATIVE CONJUGATE GRADIENT METHOD

R.A. Antinov, A.V. Starchenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: antinov.rus@mail.ru

Abstract. In this paper the solution of the following coefficient inverse problem is considered. There is a system of linear equations of the form: $\sum_j^n a_{i,j} \sigma_j x_j = b_i$, and

$\sigma_j > 0$. Coefficients $\{a_{i,j}\}$ are known. The aim is to construct an iterative procedure on synthetic data sets $\{\mathbf{b}^u\}$ and $\{\mathbf{x}^u\}$ to find the ‘unknown’ data values of $\{\boldsymbol{\sigma}\}$. In this paper, we suggest a method based on the Fletcher–Reeves conjugate gradients algorithm. The advantages of the Fletcher–Reeves method are good convergence rate and small amount of memory required to store information. OpenMP and OpenACC parallel programming technologies are used to investigate computational speedup.

Keywords: coefficient inverse problems, conjugate gradients method, Fletcher–Reeves method, parallel programming, OpenMP, OpenACC, dichotomy method.

УДК 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ФАЗОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М.А. Бурнин, О.В. Богданов

Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: mab54@tpu.ru

Аннотация. Построен цифровой макет излучателя в COMSOL Multiphysics с нетривиальной формой фазовой поверхности. В качестве базовых элементов схемы выбраны излучатели с круговой поляризацией. Изучены электромагнитные поля и диаграммы направленности в дальней зоне.

Ключевые слова: моделирование, излучение, диаграмма направленности, круговая поляризация.

Введение. Моделирование диаграмм направленности для излучателей играет важную роль в проектировании и оптимизации антенных систем. Диаграмма направленности показывает, как антенна излучает или принимает сигналы в зависимости от пространственных характеристик. Это помогает определить оптимальное расположение и ориентацию антенны для достижения максимальной эффективности при передаче или приеме сигналов. Моделирование источников излучения позволяет анализировать различные характеристики антенн, такие как направленность, усиление, угловые характеристики излучателя, поляризация, эффективность и уплотнение пропускной способности. Эти данные помогают выбрать наиболее подходящую антенну для конкретного приложения и оптимизировать ее работу. Кроме того, моделирование диаграмм направленности позволяет предсказать взаимодействие сигналов от различных антенн, что помогает избежать помех и интерференции в радиочастотных системах. В работе представлена схема источника излучения из излучателей с круговой поляризацией [1–5]. Особое расположение излучателей в пространстве и сдвиг фаз позволил смоделировать источник излучения с нетривиальной формой фазовой поверхности поля. Практическое применение таких схем может быть полезно при разработке источников излучения с улучшенной диаграммой направленности и увеличенной плотностью передачи данных [1–5].

Модель. Построим цифровой макет излучателя в виде, представленном на рисунке 1. В качестве математической модели будем использовать стандартные средства *COMSOL Multiphysics*.

Волновое уравнение:

$$(\nabla - ik_z z) \times [\mu_r^{-1}(\nabla - ik_z z) \times E^*] - k_0^2 \epsilon_{rc} E^* = 0, \quad (1)$$

вектор напряженности электрического поля определяется в виде

$$E(x, y, z) = E^*(x, y) \exp(-ik_z z). \quad (2)$$

Здесь z ось перпендикулярная плоскости Oxy , k – волновой вектор, ϵ_{rc} и μ_r постоянные определяющие электрические и магнитные свойства среды.

Интерес представляет модель со значением длины волны $\lambda=1$ мм и частотой базового излучателя равной 300 Гц. Радиус окружности на которой расположены излучатели $R \approx 2\lambda$, размер базового излучателя $r = \lambda/2$. Фазы излучателей сдвинуты друг относительно друга на величину и $\varphi_i = \frac{2\pi i}{6}$, $i = \overline{1, 6}$. Параметры подложки из диэлектрика приведены в подписи к рисунку 1.

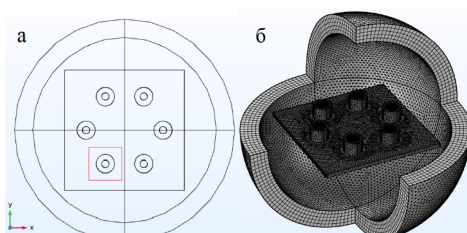


Рис. 1. Цифровой макет излучателя: а) схема расположения излучателей с круговой поляризацией в проекции на плоскость Oxy . В выделенной области расположен базовый элемент, внутренний радиус равен 0.2 мм, внешний радиус равен 0.7 мм, высота стержня 0.9 мм, каждый элемент расположен на окружности радиуса 2.1 мм, ширина диэлектрической подложки 8 мм, толщина подложки 1.5 мм, а диэлектрическая проницаемость среды относительно вакуума равна 3.38; б) 3D-модель и соответствующая ей расчетная сетка.

Выберем расчетную сетку по умолчанию, параметры зададим, как представлено в таблице 1.

Таблица 1.

Параметры расчетной сетки модели

| | |
|------------------------------|-----------|
| Minimum element size | 0.0024 мм |
| Maximum element size | 0.3535 мм |
| Maximum element growth rate | 1.5 |
| Curvature factor | 0.6 |
| Resolution of narrow regions | 0.5 |

Результаты. Проведем исследование излучения, которое создается такой схемой. Для начала представим свойства излучения для базового элемента, смотрите рисунок 1. Излучение базового элемента имеет круговую поляризацию. Диаграмма направленности представлена на рисунке 1б.

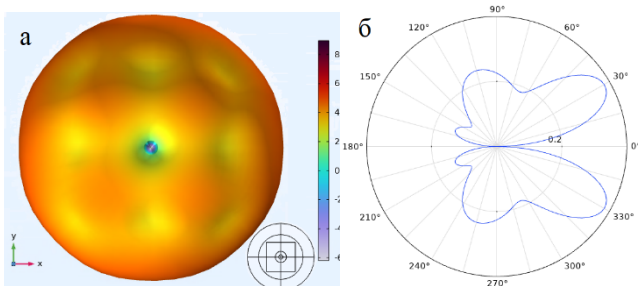


Рис. 2. Излучение базового излучателя, смотрите выделенную область на рисунке 1а. Подробное описание источника излучения можно найти в [6], (электрическое поле, В/м): а) 3D-изображение электрического поля; б) диаграмма направленности поля в дальней зоне базового излучателя

Излучение от цифрового макета излучателя представлено на рисунках 3 и 4.

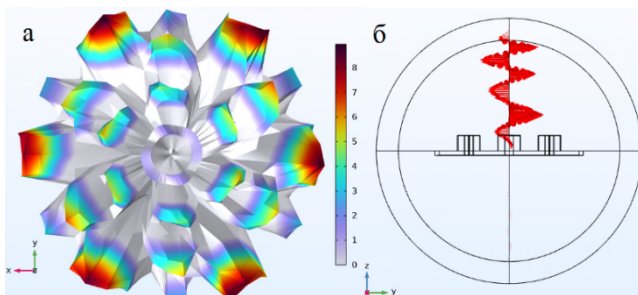


Рис. 3. Излучение от цифрового макета излучателя (электрическое поле, В/м): а) проекция поля излучения на плоскость Oxy ; б) распределение вектора напряженности

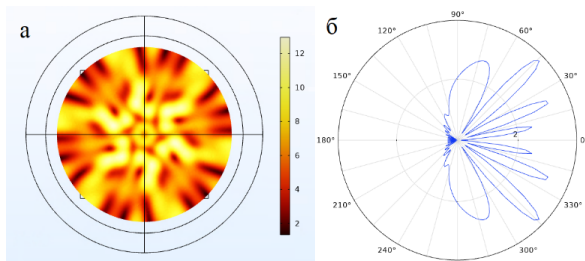


Рис. 4. Излучение от цифрового макета излучателя (электрическое поле, В/м):
а) характерное значение поля в сечении;
б) диаграмма направленности в дальней зоне

Заключение. Построен цифровой макет излучателя в COMSOL Multiphysics. Из диаграмм направленности видно, что базовый излучатель имеет угол раствора примерно 60 градусов, в то время как для внутренних лепестков в схеме диаграмма направленности имеет меньший угол раствора, около 26 градусов (угол раствора для следующих двух лепестков 44 градуса). Результирующее поле также обладает круговой поляризацией, но поверхность излучения имеет более сложный вид.

Список литературы

1. Kazinski P.O., Korolev P.S., Lazarenko G.Yu. и др. Multiplexing signals with twisted photons by a circular arc phased array // *Annals of Physics*. – 2024. – Vol. 462. – Art. No. 169610.
2. Rui Chen, Jiaying Zhou, Wen-Xuan Long et al. Hybrid circular array and Luneberg lens for long-distance OAM wireless communications // *IEEE Access*. – 2023. – Vol. 71(1). – P. 486–488.
3. Lingzhi Zhao, Xuehong Sun, Liping Liu et al. Ultra-wide band OAM antenna based on circular phased-array conical dielectric resonator// *IEEE Access*. – 2022. – Vol. 10(1109). – P. 2176–2179.
4. Noor S.K., Yasin M.N.M., Ismail A.M. et al. A review of orbital angular momentum vortex waves for the next generation wireless communications // *IEEE Access*. – 2021. – Vol. 10(1109). – P. 89471–89575.
5. Jha P., Wu K. Orbital angular momentum wave and propagation // *Recent Microwave Technologies* / A. Kishk, K. Ho Yeap (eds.). – IntechOpen, 2022. – doi: 10.5772/intechopen.104477.
6. Circularly Polarized Antenna for GPS Applications [Электронный ресурс] // *Comsol Application Gallery*. – Application ID: 15835. – URL: <https://www.comsol.com/model/circularly-polarized-antenna-for-gps-applications-15835> (09.06.2024)

MODELING OF A RADIATION SOURCE WITH A NON-TRIVIAL FORM OF THE PHASE SURFACE.

M.A. Burnin, O.V. Bogdanov

Tomsk Polytechnic University, Russia

Tomsk, Lenin str., 30, 634050 E-mail: mab54@tpu.ru

Abstract. A digital model of an emitter has been built in COMSOL Multiphysics with a non-trivial phase surface shape. Radiators with circular polarization are selected as the basic elements of the system. Electromagnetic fields and radiation patterns in the far field have been studied.

Keywords: modeling, radiation, radiation pattern, circular polarization.

УДК 531.534

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПРОТИВОПОЖАРНЫХ РАЗРЫВОВ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЕРХОВОГО ЛЕСНОГО ПОЖАРА

Е.Н. Голубничий¹, Д.П. Касымов¹, В.А. Перминов²

¹Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru

Аннотация. Построена математическая модель возникновения и распространения лесного пожара. Математически процесс переноса тепла с течением времени в данной области описывается с помощью уравнений Рейнольдса для турбулентного течения с соответствующими начальными и граничными условиями. В результате численного интегрирования получено распределение полей скорости, температуры и концентраций компонентов газовой и конденсированной фазы. В зависимости от значений параметров лесного массива и метеорологических условий получены значения скорости распространения природного пожара и контуры перемещения фронта природного пожара.

Ключевые слова: математическая модель, лесной пожар, скорость распространения, контур пожара, противопожарный разрыв.

Введение. Лесной пожар – это неуправляемое аэротермохимическое явление, в процессе которого происходит испарение свободной и связанной в органическом веществе воды, пиролиз и горение лесных горючих материалов, а также перенос энергии и веществ из зоны пожара.

Процесс горения начинается последовательно и проходит следующие фазы [1]:

1. Предварительный нагрев и подсушивание горючих материалов;
2. Высыхание с выделением водяных паров, воспламенение и горение горючих веществ (120 °С), кислот и смол (260 °С);
3. Воспламенение газов (315...425 °С) и пламенное горение с выделением дыма, углекислого газа, водяных паров и негоревших газов (650...1095 °С).

Под пиролизом лесных горючих материалов (ЛГМ) понимается расщепление при высокой температуре сложных органических соеди-

нений, из которых состоит ЛГМ, на более простые. В качестве более простых веществ получают конденсированный продукт – коксик, состоящий из почти чистого углерода, и газообразные горючие и негорючие продукты CH_4 , H_2 , CO , H_2O [2].

Горение газообразных продуктов пиролиза происходит в диффузионном режиме и, следовательно, лимитируется поступлением продуктов пиролиза и окислителя в зону горения. Горение летучих превалирует на первом этапе процесса, а горение конденсированного продукта пиролиза – на втором, завершающем. Процесс пиролиза древесины является многостадийным. Вначале в результате первой реакции разложения образуются первичные летучие, первичный кокс и жидкая смола, которая затем разлагается на вторичные летучие, а также на вторичный кокс и летучие третьего сорта, которые получают при разложении первичных летучих. Первая стадия – эндотермическая, вторая и третья – экзотермическая.

Из анализа экспериментальных исследований следует, что при горении в лесу тепло из зоны горения передается в органическую массу и расходуется на ее нагрев, сушку и пиролиз. Далее летучие и конденсированные продукты пиролиза сгорают с выделением энергии, и процесс повторяется в указанном выше порядке. Перенос энергии из зоны лесного пожара осуществляется путем кондукции, конвекции, излучения и переносом частиц из фронта пожара. В зависимости от объекта горения в многоярусном растительном покрове различают три вида лесных пожаров: низовой, верховой и почвенный [3].

На практике для защиты и охраны лесов от пожара используют лесопожарные разрывы и заслоны. Под лесопожарным разрывом понимается полоса, свободная от лесной растительности и напочвенного покрова. Лесопожарный заслон представляет собой лесную полосу из деревьев негоримых лиственных пород, а кроме того, может быть реализован созданием переувлажненной полосы перед фронтом пожара из тех же пород деревьев, что и основной участок. Эти полосы препятствуют распространению верховых и низовых лесных пожаров.

Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную задачу о зажигании лесного массива и возникновения верхового лесного пожара. В рассматриваемой области в начальный момент времени $t = 0$ задано распределение температуры $T = T_0$.

Пусть очаг зажигания имеет конечные размеры, причем начало системы координат XOZ связано с центром очага. Ось OZ направлена вертикально вверх, а ось OX – параллельно земной поверхности. Ось OX совпадает с направлением ветра. В начальный момент времени заданы координаты очага зажигания. Под действием ветра очаг верхо-

вого пожара начинает распространяться по лесному массиву. На рисунке 1 схематично изображен изучаемый процесс. На данном рисунке Γ_0 – контрольная поверхность, отделяющая зону пожара от остальной части пространства, где под зоной пожара, в соответствии с [4], понимается часть пространства, в которой параметры отличаются от своих равновесных значений.

Необходимо построить математическую модель и изучить процесс возникновения и распространения верхового лесного пожара.

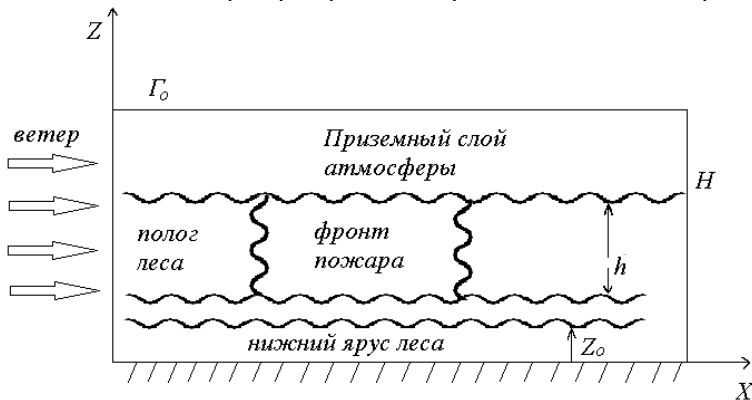


Рис. 1. Схема зоны двумерного пожара

Математическая постановка задачи. Математическая постановка задачи опирается на физическую и представляет собой дополненную и измененную модель, приведенную в работе [4]. Основные допущения, принятые при выводе системы уравнений начальных и граничных условий, следующие:

1. Ветер направлен вдоль оси X ;
2. Течение носит развитый турбулентный характер, и молекулярным переносом пренебрегаем по сравнению с турбулентным;
3. Полог леса предполагается недеформируемой пористодисперсной средой;
4. Среда в пологе леса считается двухтемпературной, т.к. различаются температура газовой и конденсированной фазы;
5. Рассматривается так называемый продуваемый лесной массив, когда объемной долей конденсированной фазы лесных горючих материалов (ЛГМ), состоящей из сухого органического вещества, воды в жидко-капельном состоянии и золы можно пренебречь по сравнению с объемной долей газовой

- фазы, включающей в себя компоненты воздуха и газообразные продукты пиролиза и горения;
6. Известна скорость движения воздуха над пологом леса в стационарном состоянии;
 7. Плотность газовой фазы не зависит от давления, т.к. скорость течения мала по сравнению со скоростью звука;
 8. Перенос энергии осуществляется путем турбулентной конвекции и излучения;
 9. Для описания процесса переноса энергии излучением используется диффузионное приближение, для описания конвективного переноса, обусловленного действием силы тяжести, используется уравнение Рейнольдса.

Исходя из того, что вертикальные размеры лесного массива несопоставимо меньше его горизонтальных размеров, общая система дифференциальных уравнений процесса тепломассопереноса в трехмерном массиве [2] может быть проинтегрирована по вертикальной координате Z . Для этого исходная система уравнений была приведена к дивергентному виду, затем проинтегрирована по высоте. При этом высота h – уровень осреднения, то есть:

$$\int_0^h \phi dz = \bar{\phi}h,$$

где $\bar{\phi}$ – среднее значение величины ϕ .

Проинтегрированная система уравнений, используемая в данной работе, подробно описана и представлена в работе [4].

В результате проведены многочисленные расчеты. Как способ инициирования горения использовался очаг, определяемый видом функции $T_n(x)$, $c_{\text{ан}}(x)$, $\varphi_{\text{ин}}(x)$, который существовал в течение некоторого времени t , обеспечивающий зажигание полога леса. На рисунках 2 и 3 представлены графики распределений: I – температуры газовой фазы \bar{T} , II – массовой концентрации кислорода \bar{C}_1 , III – газообразных горючих продуктов пиролиза \bar{C}_2 , IV – температуры твердой фазы \bar{T}_s , а на Рисунках 4 и 5 представлены графики распределения зависимости V – относительной объемной доли сухого органического вещества $\bar{\varphi}_1$, VI – воды в жидко-капельном состоянии $\bar{\varphi}_2$ и VII – кокса $\bar{\varphi}_3$, VIII – плотности энергии излучения U_R , от расстояния x в различные моменты времени при различной скорости ветра U при стандартном влажосодержании ($W=0,6$) и запасе ЛГМ ($ZAP=0,2$).

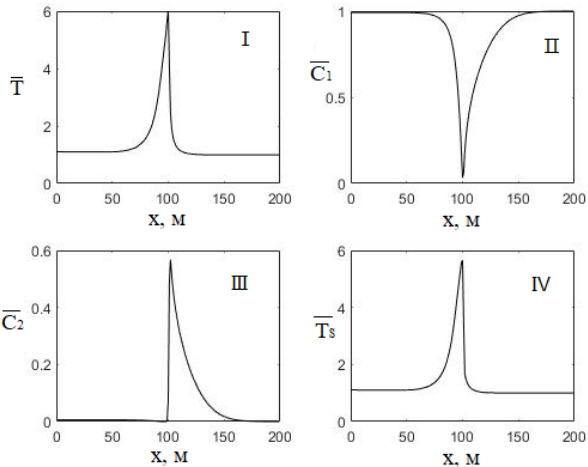


Рис. 2. Графики распределения в момент времени $t=20$ сек при скорости ветра $U=7$ м/с

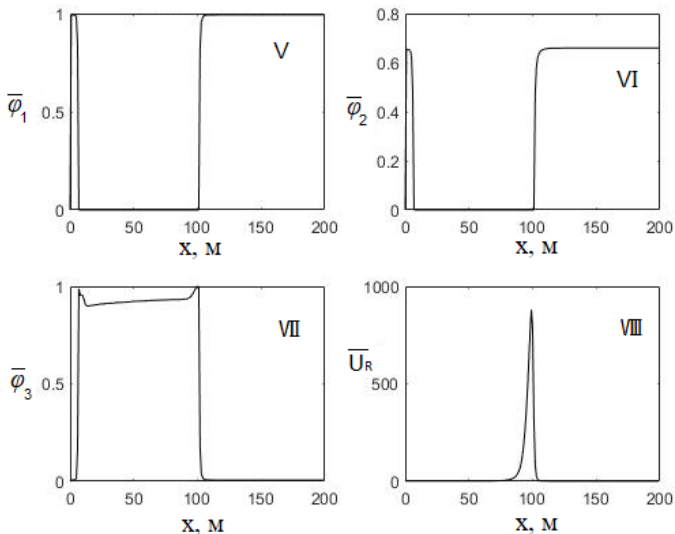


Рис. 3. Графики распределения в момент времени $t=20$ сек при скорости ветра 7 м/с

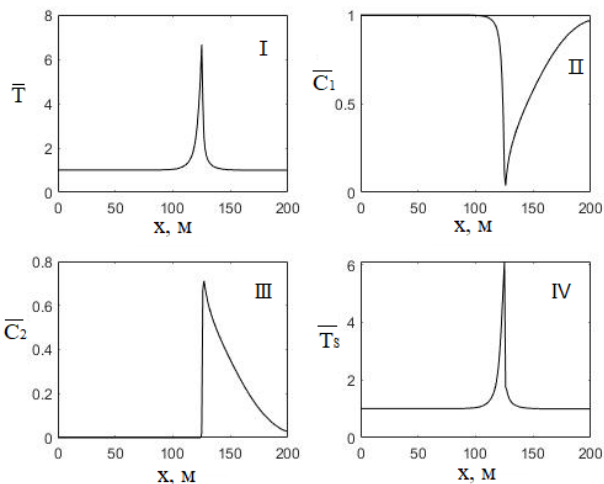


Рис. 4. Графики распределения в момент времени $t=20$ сек при скорости ветра 15 м/с

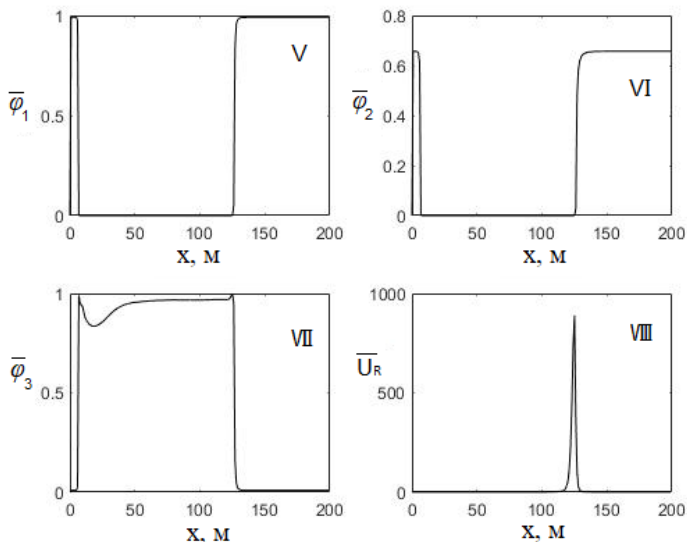


Рис. 5. Графики распределения в момент времени $t=20$ сек при скорости ветра 15 м/с

На каждом из рисунков показаны профили относительной объемной доли сухого органического вещества $\bar{\varphi}_1 = \varphi_1 / \varphi_{1n}$ – положе-

ние фронта пиролиза, относительной объемной доли кокса $\bar{\varphi}_3 = \varphi_3 / \varphi_{3m} (\varphi_{3m} = \alpha_c \rho_n \varphi_{1n} / \rho_3)$ – максимально возможный выход кокса из ЛГМ.

Для наглядности также были построены графики распространения фронта пожара при различных скоростях ветра в различные моменты времени. Распространение отражено на Рисунках 6,7 и 8.

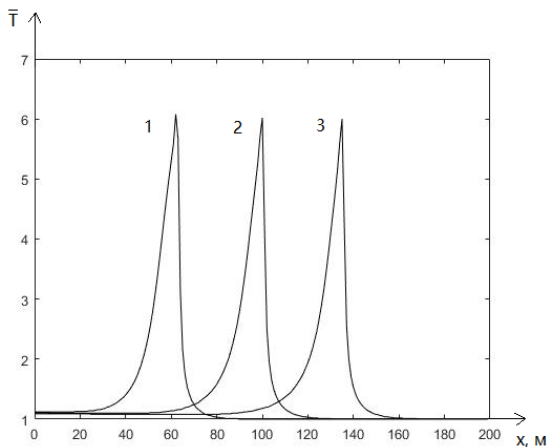


Рис. 6. Распространение фронта пожара при скорости ветра 7 м/с, в момент времени t: 1 – 10 сек, 2 – 20 сек, 3 – 30 сек

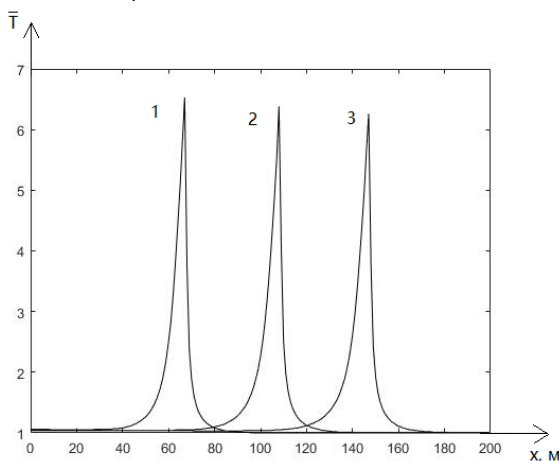


Рис. 7. Распространение фронта пожара при скорости ветра 10 м/с, в момент времени t: 1 – 10 сек, 2 – 20 сек, 3 – 30 сек

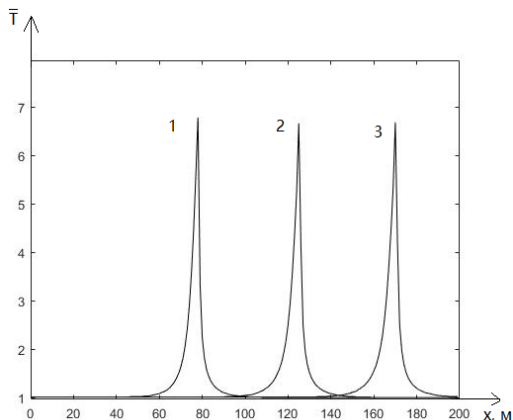


Рис. 8. Распространение фронта пожара при скорости ветра 15 м/с, в момент времени t : 1 – 10 сек, 2 – 20 сек, 3 – 30 сек

Сравнивая кривые \bar{T} на графиках, можно сделать вывод, скорость распространения фронта пожара растет при увеличении скорости ветра. Однако при увеличении скорости ветра ширина фронта уменьшается. К уменьшению размера фронта приводит уменьшение эффективного коэффициента вязкости μ_e , скорость распространения при этом также уменьшается. Но данное уменьшение не столь значительно, что свидетельствует о том, что при используемых в данном случае параметрах задачи конвективный механизм переноса является преобладающим.

Заключение. В результате была построена математическая модель возникновения и распространения лесного пожара. Математически процесс переноса тепла с течением времени в данной области описывается с помощью уравнений Рейнольдса для турбулентного течения с соответствующими начальными и граничными условиями. В результате численного интегрирования получено распределение полей скорости, температуры и концентраций компонентов газовой и конденсированной фазы. В зависимости от значений параметров лесного массива и метеорологических условий получены значения скорости распространения природного пожара и контуры перемещения фронта природного пожара.

Также в работе были получены зависимости скорости распространения фронта пожара от скорости ветра при различных значениях влагосодержания, проведен их анализ, в результате выявлено, что увеличение данных показателей приводит к уменьшению скорости распространения фронта пожара.

Кроме того, при выполнении расчетов в данной работе было изучено влияние противопожарных разрывов на процесс распространения верхового лесного пожара. Получены зависимости длины разрыва от скорости ветра при различных значениях влагосодержания.

Полученные результаты и зависимости позволяют получить критические условия распространения верхового лесного пожара при заданных размерах разрыва, значениях влагосодержания и запаса ЛГМ, скорости ветра, что, в свою очередь, дает возможность применять такой метод расчетов для профилактики и разработки новых методов тушения и предотвращения лесных пожаров.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 24-21-00069).

Список литературы

1. Щетинский Е.А. Тушение лесных пожаров: Пособие для лесных пожарных. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М. : ВНИИЛМ, 2002. – 104 с.
2. Конев Э.В. Физические основы горения растительных материалов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 239 с.
3. Усольцев В.А. Рост и структура фитомассы древостоя. – М. : Наука, 1964. – 574 с.
4. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск : Наука, 1992. – 408 с.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE IMPACT OF FIRE BREAKS ON SPREAD OF CROWN FIRES

E.N. Golubnichiy¹, D.P. Kasymov¹, V.A. Perminov²

¹Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru

Abstract. A mathematical model of forest fire occurrence and spreading is constructed. Mathematically, the process of heat transfer over time in this area is described using the Reynolds equations for turbulent flow with appropriate initial and boundary conditions. As a result of numerical integration, the distribution of velocity, temperature, and concentration fields of gas and condensed phase components is obtained. Depending on the values of the forest massif parameters and meteorological conditions, the values of the natural fire propagation velocity and contours of the natural fire front displacement were obtained

Keywords. mathematical model, forest fire, spread rate, fire contour, fire breaks.

УДК 531.534

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГОРЯЩИХ И ТЛЕЮЩИХ ЧАСТИЦ С МОДЕЛЬНОЙ КРОНОЙ

Е.Н. Голубничий¹, Д.П. Касымов¹, В.А. Перминов²

¹Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Национальный исследовательский
Томский политехнический университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru

Аннотация. Лабораторные эксперименты проводились с целью изучения взаимодействия одиночной частицы, а также группы частиц с модельной кроной хвойных насаждений. В результате получены зависимости вероятности воспламенения модельной кроны хвойных насаждений от количества частиц и их размеров при выбранных параметрах эксперимента. Полученные результаты дают возможность сделать предположение, что при выбранных параметрах эксперимента достаточно 3–4 частицы каждого из рассмотренных размеров, для воспламенения модельной кроны и возникновению пламени.

Ключевые слова: пятнистые пожары, вероятность воспламенения, горящие и тлеющие частицы, эксперимент.

Введение. Во всем мире растет число и интенсивность лесных пожаров, причем крупные лесные пожары происходят вне обычного пожароопасного сезона и истощают ресурсы для тушения пожаров. Эти лесные пожары сжигают миллионы акров, разрушают дома и, в некоторых случаях, приводят к травмам или гибели владельцев домов и пожарного персонала. Они распространяются по трем основным причинам: 1) перенос и осаждение тлеющих частиц; 2) лучистое тепло; 3) воздействие пламени [1]. Риск возгорания от тлеющих частиц зависит от нескольких факторов, включая: количество тлеющих частиц и продолжительность воздействия; количество горючего мусора или материалов вблизи здания; условия окружающей среды (такие как температура, относительная влажность и ветер). На сегодняшний день имеется достаточное количество математических моделей лесных пожаров [1]. Однако, незначительная их компонента считает вклад горящих и тлеющих частиц, которые образуются в области горения, являющиеся одной из основных причин распространения пожаров на всей планете. Данные частицы после генерации с помощью конвек-

тивной колонки подвластны поднятию и переносу ветром на новую территорию, где впоследствии оседают на поверхность и с определенной вероятностью образуют новый очаг возгорания.

Постановка задачи и методика проведения лабораторного эксперимента. Лабораторные эксперименты проводились с целью изучения взаимодействия одиночной частицы, а также группы частиц с модельной кроной хвойных насаждений.

В целях проведения эксперимента была смоделирована экспериментальная установка (рис. 1), благодаря которой производится горение и тление частиц, а также воздействие на лесной горючий материал [2].

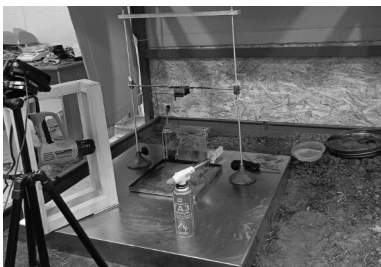


Рис. 1. Экспериментальная установка



Рис. 2. Веточки сосны, использованные в эксперименте

Следует отметить, что под лесным горючим материалом в настоящем исследовании понимается хвоя сосны, которая была помещена на веточках в деревянную «подставку». В качестве горящих и тлеющих частиц использовались веточки сосны. Размеры частиц были выбраны в соответствии с данными натуральных экспериментов, по результатам которых было отмечено, что частицы похожих размеров преобладают во время низового пожара в сосновом лесу. В качестве частиц отбирались веточки диаметра 7 ± 1 мм, которые были разделены на последующие длины: 1, 2, 4 и 6 см (рис. 2).

Лабораторные эксперименты проводились следующим образом (рис. 3). Имелся поддон, на котором установлен держатель для кюветы, крепящейся на штативы. Кювета обладает отверстиями в основании, что обеспечивало равномерный поджог частиц. Частицы были помещены в кювету. Используя газовые горелки, частицы доводились до состояния тления. Следующим шагом было «сбрасывание» частиц на веточки хвои. В экспериментах рассматривалось влияние воздушного потока в зоне аккумуляции частиц, с помощью теплового фена марки «ИНТЕРСКОЛ». Температура воздушного потока в зоне паде-

ния частиц составила 400 ± 20 К. Для каждой длины частиц, указанной выше, использовалось от 1 до 10 частиц по 3 попытки эксперимента. Рассматривались следующие скорости ветра: 1.5 – 3.5 м/с. При помощи анализатора влажности AND MX-50 установлено, что влагосодержание хвои – 7%, с погрешностью до 0.01% влажности.



Рис. 3. Подготовка частиц для проведения эксперимента

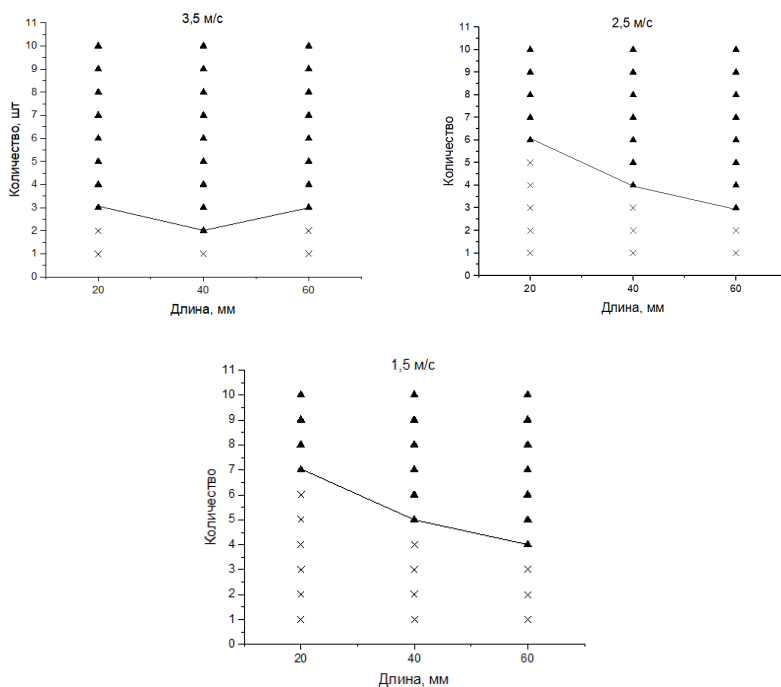


Рис. 4. Графическая интерпретация вероятности воспламенения модельной кроны в зависимости от количества и длины частиц, а также скорости ветра

Результаты в виде зависимости вероятности воспламенения модельной кроны хвойных насаждений от количества частиц и их размеров представлены на рисунке 44. Линия показывает минимальное количество частиц для воспламенения модельной кроны. Зажигание фиксировалось с помощью видеокамеры SONY DCR-DVD505E. Под зажиганием понимается появление пламени непосредственно по кроне

Анализируя графики, можно заметить, что при увеличении скорости ветра увеличивается и вероятность воспламенения хвои частицами одних и тех же размеров, что выражается в уменьшении времени зажигания. Так же присутствует зависимость вероятности воспламенения от количества частиц: чем больше частиц взаимодействует с кроной, тем меньше время зажигания, вне зависимости от скорости набегающего воздушного потока. Это связано с увеличением площади контакта частиц с последующей передачей энергии. В таблицах представлены времена зажигания модельных крон в зависимости от количества частиц, а также скорости ветра.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (№ 24-21-00069).

Список литературы

1. Гришин А.М., Зима В.П., Касымов Д.П. Методы, средства и технологии локализации и тушения природных пожаров // Актуальные проблемы пожарной безопасности : материалы XXVIII международной научно-практической конференции: в 2 частях. – 2016. – С. 477–486.
2. Гришин А.М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. – Новосибирск : Наука, 1992. – 408 с.
3. Касымов Д.П., Голубничий Е.Н., Перминов В.В. и др. Моделирование зажигания строительных материалов частицами, нагретыми до высокой температуры // Все грани математики и механики : сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции. – Томск, 2022. – С. 43–52.

EXPERIMENTAL STUDY OF INTERACTION OF FIREBRANDS WITH MODEL CROWNS

E.N. Golubnichiy¹, D.P. Kasymov¹, V.A. Perminov²

¹Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: golubnichii_egor@mail.ru

Abstract. Laboratory experiments were conducted to study the interaction of a single particle and a group of particles with a model coniferous crown. As a result, the dependences of the probability of ignition of model coniferous crowns on the number of particles and their sizes at the selected parameters of the experiment were obtained. The obtained results make it possible to make an assumption that at the

chosen parameters of the experiment 3–4 particles of each of the considered sizes are enough for ignition of the model crown and flame occurrence.

Keywords: spot fires, ignition probability, firebrands, experiment.

УДК 519.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В КРУГЕ С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКОЙ ВСТАВКОЙ

В.Е. Голубцова, А.В. Старченко

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: valgbtvs@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается задача электроимпедансной томографии (ЭИТ) в круге с неконцентрической вставкой для полной электродной модели. Целью исследования является получение приближенного численного решения уравнения эллиптического типа в неоднородном круге со смешанными граничными условиями. Для достижения результатов поставленной задачи используются квадратурные формулы для сильно осциллирующих функций. Также применяются прямой или итерационный методы решения СЛАУ. Для получения решения написана программа на языке C++ с параллельными технологиями OpenMP. Выполнены тестирование и исследование влияния параметров задачи на результаты, которые могут быть использованы для дальнейших работ в области методов ЭИТ.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, приближенное решение, сильно осциллирующие функции, полная электродная модель.

Введение. Электроимпедансная томография (ЭИТ) позволяет визуализировать пространственное распределение электрического импеданса внутри биологического объекта, в частности, внутри тела человека, по результатам неинвазивных электрических измерений. Его суть заключается в том, что электрические токи могут проникать через ткани разного типа с разной скоростью и сопротивлением. Путем измерения электрической проводимости тканей можно получить данные об их структуре и составе. Эти измерения можно выполнить, используя электроды, расположенные на поверхности тела пациента. Одно из главных трудностей данного исследования – сложность математического аппарата реконструкции и визуализации полученных измерений. Математика играет ключевую роль в ЭИТ, поскольку для интерпретации собранных данных и создания изображений используются сложные алгоритмы, в основном, численные решения. После обзора

и анализа современного состояния проблемы можно сделать вывод, что актуальна разработка новых подходов решения математических моделей рассматриваемых процессов и устройств для повышения точности реконструкции изображений.

Прямая задача ЭИТ формулируется как нахождение распределения потенциала электрического поля при заданной конфигурации токов, протекающих через поверхность в точках контакта электродов и заданном распределении проводимости внутри биологического объекта. Согласно статье [1] выделяют несколько видов прямых задач: Continuous Model, когда на всей границе известно гладкое распределение плотности электрического тока; Point Electrode Model, когда электроды имеют точечный размер, на электродах задается плотность электрического тока, а в промежутках между ними исследуемое тело контактирует с воздухом и плотность тока равна нулю; Gap Model – характеризуется известными условиями Неймана на электродах конечных размеров; Shunt Electrode Model – корректно моделирует геометрию электродов, но пренебрегает учетом сопротивления тонкого контактного слоя между объектом и электродом; Complete Electrode Model – добавляет учет контактного сопротивления для каждого электрода. В работе [2] впервые вводится математическая формулировка прямой задачи, а также приводятся численные методы ее решения. В исследовании получены дифференциальные уравнения в частных производных для скалярной функции потенциалов. Решая уравнение методом конечных элементов, с учётом граничных условий и известных значений потенциала, определяется распределение проводимости в объекте.

Цель данного исследования заключается в получении приближенного численного решения уравнения эллиптического типа в неоднородном круге со смешанными граничными условиями.

Постановка задачи. **Постановка задачи.** Имеется область 1 – круг с центром в точке (x_0, y_0) . Радиус этого круга – ρ . Коэффициент электрической проводимости поля данной области – σ_1 . Также есть область 2 – круг радиуса R с центром в начале координатной системы xOy с круговым вырезом (область 1). Проводимость в области 2 равна σ_2 . Внутри каждой области распределение потенциала определяется уравнением Лапласа. Предполагается, что на границе тела между электродами тока нет. На границе областей 1–2 с различной проводимостью используются граничные условия четвертого рода – условия сопряжения – непрерывных значений решения и потоков (плотности электрического тока). На границе области 2 расположены электроды,

через которые подается или отводится электрический ток. Полуширины электродов w и их центр совпадает со значениями $\theta_i = \frac{2\pi i}{NE}, i = 0 \dots NE - 1$, где NE – количество электродов. На внешней границе области 2 записываются граничные условия, свойственные полной электродной модели, в которой рассматриваются сопротивления z_i электродов и известные значения напряжения U_i на электродах. $\sum_i U_i = 0$. Каждый электрод обладает своим сопротивлением $z_i > 0, i = 0 \dots NE - 1$.

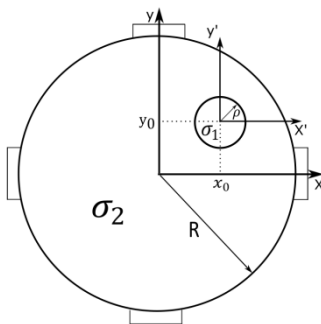


Рис. 1. Модель

Координаты:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) & x' &= x - x_0 & 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= r \sin(\theta) & y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

Из зависимости между полярными координатами (r, θ) и (r', θ') можно записать:

$$\begin{aligned} r' &= \sqrt{r^2 - 2r(x_0 \cos(\theta) + y_0 \sin(\theta)) + x_0^2 + y_0^2} \\ \theta' &= \arccos\left(\frac{R \cos(\theta) - x_0}{\sqrt{R^2 - 2Rx_0 \cos(\theta) + x_0^2}}\right) \end{aligned}$$

Математическая постановка задачи.

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta'^2} = 0 \quad 0 \leq r' < \rho$$

$$r' \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta'^2} = 0 \quad 0 < r' < R'(\theta')$$

Граничные условия:

$$r' = \rho : u = v, -\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial r'} = -\sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r'}$$

$$r = R(r' = R'(\theta')) : \begin{cases} v(r, \theta) + z_i \sigma_2 \frac{\partial v}{\partial r} = U_i, \theta \in [\theta_i - w, \theta_i + w] \\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \theta \notin [\theta_i - w, \theta_i + w] \end{cases}$$

В соответствии следующим утверждениям 1 и 2 из [3], задача поставлена корректно.

1. Для существования решения необходимо выполнение закона сохранения электрического заряда. Сумма тока на границе равна нулю.
2. Для единственности решения необходимо условие для напряжений, задающее нулевой потенциал. Сумма напряжений равна нулю.

Метод решения. Решение ищется в виде:

$$u(r', \theta') = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (r')^n f_n(\theta')$$

$$v(r', \theta') = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (r')^n + b_n (r')^{-n}) f_n(\theta')$$

$u(r', \theta')$ – решение во вставке – область 1.

$v(r', \theta')$ – решение в области 2.

$u_0, v_0, \{d_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}$ – неизвестные коэффициенты,

$$f_n(\theta') = C_n \cos(n\theta') + S_n \sin(n\theta').$$

Из условий сопряжения получаем:

$$u(r, \theta) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)), 0 \leq r \leq \rho < R$$

$$v(r, \theta) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A\left(\frac{r}{R}\right)^n + B(n)\left(\frac{r}{R}\right)^{-n}] (C_n \cos(n\theta) + S_n \sin(n\theta)), \rho \leq r \leq R$$

Где $A=0.5\left(1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)$, $B(n)=0.5\left(1-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n}$.

Неизвестные коэффициенты S_n, C_n, u, u_0 находятся интегрированием граничных условий по $\theta \in [0, 2\pi]$.

Получается бесконечно большая система линейных уравнений вида:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \vec{C} \\ \vec{S} \\ u_0 \end{pmatrix} = \vec{f} \tag{0}$$

Элементы матрицы $A_{i,j}$ вычисляются через определенные интегралы от сильно осциллирующих функций вида:

$$J_c(\lambda) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(\lambda t) dt \tag{1}$$

$$J_s(\lambda) = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(\lambda t) dt \tag{2}$$

где λ – положительный числовой параметр.

Сильно осциллирующие функции имеют быстро изменяющиеся значения на отрезке интегрирования, поэтому используются специальные приближенные квадратурные формулы для численного вычисления интегралов.

Было рассмотрено сразу два метода приближенного вычисления. Один из вариантов – формула Филона, взятая из [4]. Другой способ рассмотрен в статье [5]. Данные методы были применены на практике в математическом пакете Matchad на более простом примере. При сравнении результатов полученных аппроксимаций, формула Филона оказалась менее точной, поэтому в дальнейшем не используется.

Для получения формул численного интегрирования в [5] авторами исследован тот вариант, когда функция $f(t)$ на каждом элементарном промежутке отрезка интегрирования аппроксимируется многочленом нулевой степени – константой, равной значению $f(t)$ в середине этого промежутка.

Для начала задается на $[0, 2\pi]$ система точек $t_k = kh$, $k = 1 \dots n$, $h = \frac{2\pi}{n}$ и аппроксимацию функции $f(t)$ на этом промежутке определим формулой:

$$f(t) \approx \tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^n \theta_k(t) f(t_k) \quad (3)$$

в которой
$$\theta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_k - \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}] \\ 0, & t \notin [t_k - \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2}] \end{cases}$$

Функция $f(t)$ в интегралах по формулам выше (1), (2) заменяется (3). Затем с помощью несложных преобразований получим результат в виде:

$$J_c(f; \lambda) = \sum_k \frac{2}{\lambda} \left(\sin\left(\frac{\lambda h}{2}\right) \cos(\lambda t_k) \right) f(t_k)$$

$$J_s(f; \lambda) = \sum_k -\frac{2}{\lambda} \left(\sin\left(-\frac{\lambda h}{2}\right) \sin(\lambda t_k) \right) f(t_k)$$

Для оценки погрешности сформулируем теорему [5].

Теорема.

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Тогда для всех λ справедливы неравенства:

$$\left| J_c(\lambda) - \tilde{J}_c(\lambda) \right| \leq 2\pi\omega(f; h)$$

$$\left| J_s(\lambda) - \tilde{J}_s(\lambda) \right| \leq 2\pi\omega(f; h)$$

где $\omega(f; h) = \max |f(t'') - f(t')|$

Если же $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией на этом отрезке, то

$$\left| J_c(\lambda) - \tilde{J}_c(\lambda) \right| \leq \pi M_1 h$$

$$\left| J_s(\lambda) - \tilde{J}_s(\lambda) \right| \leq \pi M_1 h$$

где $M_1 = \max |f'(t)|$.

Таким образом приближенно вычисляются коэффициенты матрицы А.

В дальнейшем матрица была исследована. Её определитель не равен нулю, матрица несимметрична и для получения решения системы уравнений (0) рассматриваются сразу два метода. Первый классический – метод Гаусса с выбором главного элемента. Это модификация метода последовательного исключения неизвестных, выбор главного элемента позволяет избежать появления больших погрешностей при делении на малые значения. Второй – стабилизированный алгоритм бисопряженных градиентов (**BICGStab**) [6]. Этот метод применяется для работы с системами, которые включают невырожденные матрицы коэффициентов любого типа, что и обуславливает его широкую распространённость.

Для более эффективного решения данной задачи была написана программа на языке С++ с использованием технологии параллельного программирования OpenMP. Распараллеливание применено в части вычислений приближенных значений интегралов для коэффициентов матрицы А (1), (2), что сократило время работы в 15 раз.

Результаты. Проведено тестирование метода и параллельной вычислительной программы. Взяты результаты точных вычислений коэффициентов матрицы А из [7] для концентрической вставки и полученные в ходе данной работы при $\sigma_1 = \sigma_2$ с заданным $N=25$. Графики сравнения результатов представлены ниже. На рис. 2 приведены графики распределения потенциала на границе, а на рис. 3 их разность, взятая по модулю.

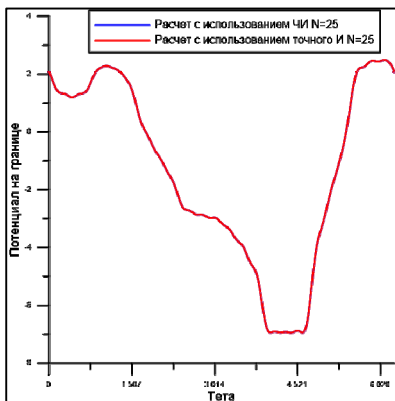


Рис. 2. Графики тестирования

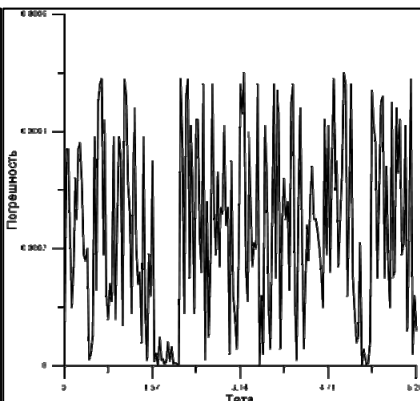


Рис. 3. График погрешности

Проведены исследования влияния различных характеристик рассматриваемой задачи. При смещении вставки и при различных заданных значениях проводимости. Результаты представлены в графиках ниже.

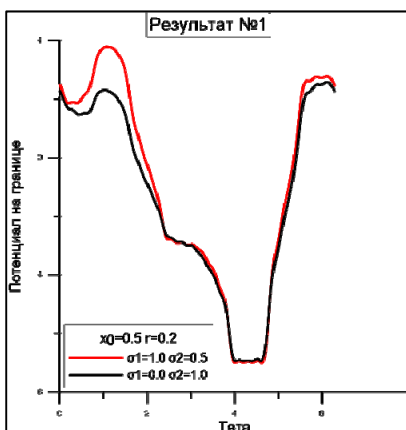


Рис. 4. Различные σ

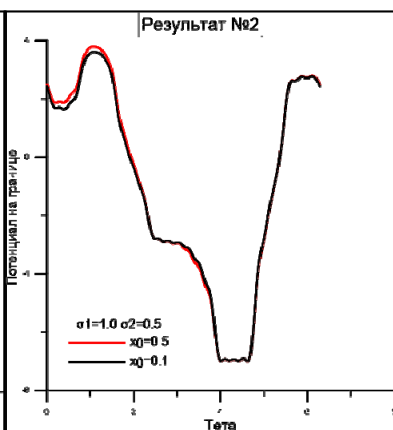


Рис. 5. Разные положения вставки

Заключение. Получено новое приближенное решение прямой смешанной задачи ЭИТ для полной электродной модели с неконцентрической вставкой со смещенным центром. Изучены и применены на практике методы приближенных вычислений интегралов от сильно осциллирующих функций различного вида. При решении системы линейных алгебраических уравнений используется итерационный метод

решения BICGStab и прямой метод Гаусса с выбором главного элемента.

Для получения результатов написана программа на C++ с использованием параллельных технологий OpenMP. Проведены результаты тестирования и исследования влияния параметров задачи.

Список литературы

1. Boyle A., Adler A. Electrode models under shape deformation in electrical impedance tomography // Journal of Physics: Conference Series. – 2010. – Vol. 224. – Art. No. 012051.
2. Gencer N.G., Kuzuoglu M., Ider Y.Z. Electrical impedance tomography using induced currents // IEEE Transactions on Medical Imaging. –1994, June. – Vol. 13(2). – P. 338–350. – doi: 10.1109/42.293927.
3. Erkki S., Cheney M., Isaacson D. Existence and uniqueness for electrode models for Electric Current Computed Tomography // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1992. – Vol. 52(4). – P. 1023–1040.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Интегрирование быстро осциллирующих функций // Численные методы : учеб. пособие. – М. : Наука, 1987. – 600 с.
5. Мелешко И.Н., Нифонтова Д.А., Сорокин В.В. К приближенному интегрированию сильно осциллирующих функций // Наука и техника. – 2017. – Т. 16, № 4. – С. 343–347. – doi: 10.21122/2227-1031-2017-16-4-343-34.
6. Саад Ю. BICGSTAB // Итерационные методы для разреженных линейных систем : учеб. пособие ; в 2-х т. / пер. с англ. Х.Д. Икрамов. – М. : Из-во МГУ, 2013. –Т. 1. – 344 с. – (Суперкомпьютерное образование).
7. Старченко А.В., Седнев М.А., Панько С.В. Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учетом сопротивления электродов // Вест. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2021. – № 74. – doi: 10.17223/19988621/74/3.

AN APPROXIMATE SOLUTION TO THE PROBLEM OF ELECTRO-IMPEDANCE TOMOGRAPHY IN A CIRCLE WITH A NON-CONCENTRIC INSERT

Y.E. Golubtsova, A.V. Starchenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: valglbtstv@gmail.com

Abstract. In this paper, the problem of electroimpedance tomography (EIT) in a circle with a non-concentric insert for a complete electrode model is considered. The aim of the study is to obtain an approximate numerical solution of an elliptic equation in an inhomogeneous circle with mixed boundary conditions. To achieve the results of the task, quadrature formulas for highly oscillating functions are used. Direct or iterative methods of solving linear equation system are also used. To ob-

tain a solution, a program has been written in C++ with parallel OpenMP technologies. Testing and investigation of the effect of the task parameters on the results, which can be used for further work in the field of EIT methods, have been performed.

Keywords: electroimpedance tomography, approximate solution, highly oscillating functions, complete electronic model.

УДК 536.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

А.А. Ерышев, Д.В. Лецинский

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: qwertytoliker@gmail.com

Аннотация. Цель исследования заключается в построении параллельного алгоритма для численного моделирования процесса теплообмена и определении динамики изменения температуры в стальной пластине в зависимости от времени. Рассматривается ситуация, когда стальная пластина, имеющая температуру 20 градусов Цельсия, находится в контакте с воздухом, температура которого 200 градусов Цельсия.

Использование параллельных вычислений, особенно многопоточности, позволяет эффективно решать задачи теплопроводности, ускоряя процесс моделирования.

В данной работе проводится сравнение и анализ численного решения задачи теплопроводности с применением многопроцессорной вычислительной техники с ее последовательным вариантом. Решение поставленной дифференциальной задачи находилось методом конечных разностей с применением явной разностной схемы. Для распараллеливания программного кода использовалась технология OpenMP.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, разностные схемы, параллельные вычисления, OpenMP.

Введение. В современном мире проблемы теплообмена и теплопроводности являются актуальными и важными для многих областей науки и техники. В данной работе рассматривается численное решение уравнения теплопроводности с использованием параллельных вычислений, в частности многопоточность с использованием OpenMP. Основной задачей является анализ изменения температуры пластины при её контактном взаимодействии с окружающей средой, представленной воздухом.

Физико-математическая постановка задачи. Моделируется процесс нагрева однородной стальной пластины (рис. 1). В начальный момент времени температура пластины равна 20 °С. Пластину помещают в печь и нагревают до температуры 200 °С. Необходимо определить, как с течением времени будет изменяться температура пластины в различных ее точках.

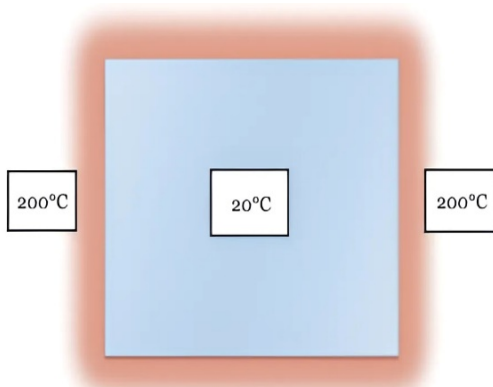


Рис. 1. Физическая постановка задачи

Процесс описывается уравнением теплопроводности (1) с граничными условиями третьего рода (2):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= \alpha(T - T_{air}), \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha(T - T_{air}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $T(t, x, y)$ – температура пластины; t – время; x, y – пространственные координаты; a – коэффициент температуропроводности, который является физической величиной, характеризующей скорость изменения температуры вещества в неравновесных процессах; λ – коэффициент теплопроводности кирпича (Вт/м · °C); α – коэффициент теплообмена между границей и воздухом; T_{air} – температура воздуха.

Численное решение. Рассмотрим пластину в двумерной декартовой системе координат с центром в верхнем левом углу. Построим сетку $\bar{\omega}_{h_x, h_y}$, которая будет иметь вид:

$$\bar{\omega}_{h_x, h_y} = \left\{ \begin{array}{l} x_i, y_j | x_i = i \cdot h_x; y_j = j \cdot h_y; \\ i = 0, N_x + 1; j = 0, N_y + 1; \\ h_x = \frac{L_x}{(N_x + 1)}; h_y = \frac{L_y}{(N_y + 1)}; \end{array} \right\}, \quad (3)$$

где N_x, N_y – количество внутренних точек разбиения по осям O_x и O_y , соответственно; L_x, L_y – размеры пластины по соответствующим осям;

h_x, h_y – шаги сетки, покрывающей пластину, с количеством узлов $Nx + 2$ и $Ny + 2$ также по соответствующим осям.

Для численного решения задачи мы будем использовать метод конечных разностей, применяя аппроксимацию при переходе с одного временного слоя на другой.

Перейдем от непрерывной задачи к дискретной. Введем обозначение $T(t_n, x_i, y_j) = T_{i,j}^n$, где верхний индекс n обозначает номер временного слоя, а нижние индексы i и j обозначают координаты узла в рассматриваемой двумерной области (3).

Проведем аппроксимацию производных по времени и пространству с помощью метода конечных разностей, применив соответствующие конечно-разностные формулы (4) и (5):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j}^n \approx \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau}; \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^2}\right)_{i,j}^n \approx \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h_x^2}; \quad (5)$$

Подставляя конечно-разностные формулы (4) и (5) в исходное уравнение (1), получаем дискретный аналог рассматриваемого уравнения теплопроводности, а выражая $T_{i,j}^{n+1}$, получаем явную разностную схему для решения поставленной задачи:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \alpha\tau \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{h_y^2} \right). \quad (6)$$

Полученная явная разностная схема аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение с первым порядком по времени и со вторым по координате: $O(\tau) + O(h_x^2) + O(h_y^2)$.

Также, данная явная разностная схема является устойчивой, со следующим условием:

$$\tau \leq \frac{h_x^2 h_y^2}{2\alpha(h_x^2 + h_y^2)}. \quad (7)$$

Программирование. Программная реализация поставленной задачи была выполнена на языке программирования C++ с использованием технологии параллельного программирования OpenMP, предназначенной для вычислительных систем с общей памятью.

Для распараллеливания алгоритма решения поставленной задачи в программе используется директива: **#pragma omp parallel** с вложенной директивой **#pragma omp for**, которая используется для многопо-

точного выполнения циклов **for**. Схема распределения итераций цикла задается с помощью опции: **schedule** с параметром **guided**. Дополнительный параметр к опции **schedule** – **chunk** оставлен по умолчанию равным 1.

Для достижения максимально возможного ускорения программы также была использована опция **nowait**, которая позволяет проводить распределение итераций без синхронизации, что разумно, принимая во внимание явную схему для определения $T_{i,j}^{n+1}$.

Таким образом, полученный распараллеленный алгоритм для решения поставленной задачи выглядит следующим образом (рис. 2):

```
#pragma omp parallel
{
#pragma omp for schedule (guided) nowait
for (int k = 0; k < Ht; k++) //цикл по временным шагам
{
for (int i = 1; i <= Nx; i++)
for (int j = 1; j <= Ny; j++)
//расчет внутренних узлов

for (int i = 0; i <= Nx + 1; i++)
//расчет внешних узлов слева и справа

for (int j = 0; j <= Ny + 1; j++)
//расчет внешних узлов сверху и снизу

for (int i = 0; i <= Nx + 1; i++)
for (int j = 0; j <= Ny + 1; j++)
T[i][j] = T_new[i][j]; //переопределение массива T
}
}
```

Рис. 2. Псевдокод алгоритма решения поставленной задачи с использованием библиотеки OpenMP

Результаты. В ходе решения задачи размер расчетной сетки был задан 400*400 узлов. Вычисления проводились на 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16 потоках. Количество временных шагов Ht задавалось равным: 20000, 50000, 100000, что соответствует остановки процесса нагрева пластины через 3.5, 8.5 и 17 часов, соответственно. В программу был добавлен счетчик, который вычисляет время выполнения программы.

Вычисления проводились на персональном компьютере на базе 6-ти ядерного, процессора AMD Ryzen 5 4600H 3.0 ГГц с 16Гб оперативной памяти. Благодаря технологии Hyper-Threading, на данном процессоре присутствуют 12 логических ядер, что потенциально может дать дополнительное ускорение программ, выполняемых в многопоточном режиме.

На основе полученных результатов были построены контуры распределения температур по пластине через 3.5, 8.5 и 17 часов, соответственно (рис. 3).

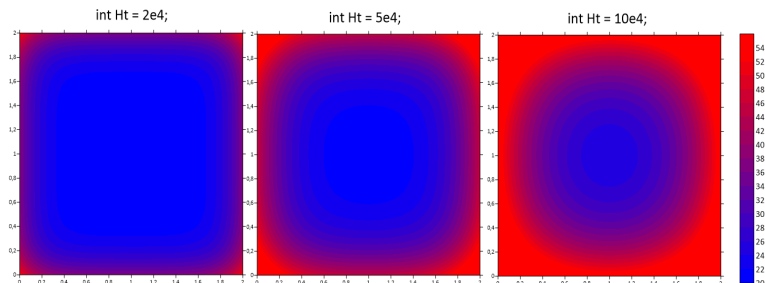


Рис. 3. Контуры распределения температур пластины через 3.5/8.5/17 часов

Для анализа эффективности параллельной программы, ниже представлена таблица 1, показывающая время выполнения и ускорения программы на разном количестве потоков.

Таблица 1.

Время выполнения и ускорение программы с использованием технологии OpenMP.

| Потоки | Время выполнения | Ускорение |
|--------|------------------|-----------|
| 1 | 76.04 | 1 |
| 2 | 42.47 | 1.790 |
| 4 | 25.2 | 3.017 |
| 6 | 19.93 | 3.815 |
| 8 | 17.2 | 4.420 |
| 10 | 16.11 | 4.72 |
| 12 | 15.96 | 4.764 |
| 14 | 16.02 | 4.746 |
| 16 | 16.07 | 4.731 |

Из полученных данных можно заметить, что с увеличением количества потоков время выполнения программы сокращается (Таблица 1). После 12 потока видно незаметное увеличение времени работы. Это связано с тем, что система, на которой проводились вычисления, ограничена 12 логическими ядрами. Поэтому, последующее увеличение количества потоков не будет давать прироста во времени выполнения программы.

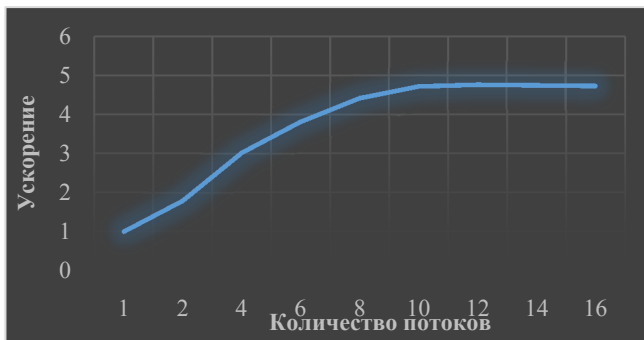


Рис. 3. Ускорение параллельной программы с использованием технологии OpenMP через 17 часов

Из графика (рис. 3) видно, что до 12 используемых потоков программа работает заметно быстрее последовательного варианта, но при дальнейшем увеличении числа потоков эффективность программы падает. Это объясняется тем, что с увеличением числа задействованных потоков время, затрачиваемое на выполнение арифметических операций, уменьшается и становится сопоставимым со временем, необходимым для передачи данных, что напрямую отражается и на показателе ускорения параллельной программы.

Заключение. По итогам проведенной работы проведено моделирование нагрева стальной пластины. Программа для решения поставленной задачи написанная на языке C++ была распараллелена с помощью технологии OpenMP. По результатам проведенного анализа можно заключить, что полученная параллельная версия программы позволяет ускорить время получение решения в ~ 3.8 раза при использовании всех 6 доступных физически ядер, и в ~ 4.7 раз при использовании всех доступных 12 логических потоков.

Список литературы

1. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP : учеб. пособие. – М. : Изд-во МГУ, 2009. – 77 с.
2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем : учеб. пособие. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
4. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений. – Томск : Изд-во Том. ун-та, 2013. – 225 с.

NUMERICAL SOLUTION OF THE HEAT CONDUCTION EQUATION
USING MULTIPROCESSOR COMPUTER TECHNOLOGY

A.A. Yeryshev, D.V. Leshchinskiy

Tomsk State University, Russian Federation, 634050, Tomsk, Lenin str., 36.

E-mail: qwertyoliker@gmail.com

Abstract. The aim of the study is to construct a parallel algorithm for numerical simulation of the heat transfer process and determine the dynamics of temperature changes in a steel plate depending on time. The situation is considered when a steel plate having a temperature of 20 degrees Celsius is in contact with air whose temperature is 200 degrees Celsius.

The use of parallel computing, especially multithreading, allows one to effectively solve thermal conductivity problems, speeding up the modeling process.

This paper compares and analyzes the numerical solution of the heat conduction problem using multiprocessor computing technology with its sequential version. The solution to the posed differential problem was found by the finite difference method using an explicit difference scheme. OpenMP technology was used to parallelize the program code.

Keywords: heat equation, difference schemes, parallel computing, OpenMP.

УДК 515.162.8:512.545

ЦИКЛИЧЕСКАЯ УПОРЯДОЧИВАЕМОСТЬ И ГРУППЫ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ

М.Э. Иванов

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения
Российской академии наук
Россия, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4, 630090
E-mail: m.ivanov2@g.nsu.ru

Аннотация. Для группы G рассмотрен её тензорный квадрат $G \otimes G$ и внешний квадрат $G \wedge G$ и их связь со свойством циклической упорядочиваемости. При некоторых предположениях о группах гомологий $H_1(G)$ и $H_2(G)$ циклически упорядочиваемой группы G доказано, что $G \otimes G$ и $G \wedge G$ упорядочиваемы. Таким образом, кручение в группе, поднимающееся до кручения в $G \wedge G$ или в $G \otimes G$ является препятствием к циклической упорядочиваемости. Полученные результаты применены для изучения групп виртуальных узлов.

Ключевые слова: упорядочиваемые группы, циклическая упорядочиваемость, неабелево тензорное произведение, виртуальные узлы.

Циклическая и линейная упорядочиваемость

Группа G называется *упорядочиваемой*, если существует отношение порядка на G , такое что для любых h, g, k из G выполнено

$$g < k \Leftrightarrow hg < hk.$$

Для счетной группы G её упорядочиваемость равносильна существованию вложения в $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ – группу сохраняющих ориентацию гомоморфизмов прямой.

Нас будет интересовать понятие, обобщающее упорядочиваемость.

Группа G называется *циклически упорядочиваемой*, если существует функция $c: G^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ обладающая следующими свойствами:

1. $c^{-1}(0) = \{(g_1, g_2, g_3) \in G^3 \mid g_i = g_j \text{ для некоторого } i \neq j\}$,
2. $c(g_2, g_3, g_4) - c(g_1, g_3, g_4) + c(g_1, g_2, g_4) - c(g_1, g_2, g_3) = 0$,
3. $c(g_1, g_2, g_3) = c(hg_1, hg_2, hg_3) \quad \forall h, g_1, g_2, g_3 \in G$.

Для счетной группы G её циклическая упорядочиваемость равносильна существованию вложения в $\text{Homeo}_+(S^1)$ – группу сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. Можно показать, что такие функции $c: G^3 \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неоднородными 2-коциклами $f_c: G^2 \rightarrow \mathbb{Z}$, такими,

что $f_c(g, h) \in \{0, 1\}$ и $f_c(g, g^{-1}) = 1$ для всех $g \in G \setminus \{id\}$. Если рассмотреть центральное расширение, определенное таким 2-коциклом

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G_c \rightarrow G \rightarrow 1$$

окажется, что G_c – упорядочиваемая группа, а \mathbb{Z} – кофинальная подгруппа. В частности, если $[f_c] = 0 \in H^2(G)$, то G – упорядочиваемая группа, как подгруппа G_c . Подробно об этом соответствии и связи с упорядочиваемыми группами можно прочитать в [1,2].

Лемма 1. Пусть задан морфизм расширений

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow = & & \\ 1 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & \hat{G} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

где A упорядочиваемая группа. Если \hat{G} циклически упорядочиваема, тогда \tilde{G} является циклически упорядочиваемой. Если \hat{G} упорядочиваема, то \tilde{G} упорядочиваема.

Для всякой группы G , такой, что $G_{ab} = G/[G, G]$ является свободной абелевой группой, существует универсальное центральное расширение

$$1 \rightarrow H_2(G) \rightarrow G_u \rightarrow G \rightarrow 1$$

О построении такого расширения и его свойствах можно прочитать в [6]. Для нас важно, что для любого другого центрального расширения нашей группы G в него определен морфизм из универсального расширения. Пользуясь Леммой 1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть G – циклически упорядочиваемая группа. Если $H_2(G)$ не имеет кручения, а $H_1(G)$ – свободная абелева группа, тогда универсальное расширение G_u упорядочиваемо. Если дополнительно потребовать, чтобы G не была упорядочиваемой, а $H_2(G)$ была изоморфна \mathbb{Z} , то универсальное центральное расширение соответствует некоторому циклическому порядку на G .

Тензорное и внешнее произведения групп

Неабелево тензорное произведение групп, действующих друг на друга, было введено в [3]. Оно возникает в теоремах типа ван Кампена для высших гомотопических групп. Мы будем рассматривать только произведение группы на себя, т.е. тензорный квадрат группы.

Пусть G – произвольная группа. Её тензорный квадрат $G \otimes G$ определяется как группа, свободно порожденная символами $g \otimes h$, где $g, h \in G$, профакторизованная по соотношениям

$$\begin{aligned} gh \otimes k &= (h^g \otimes k^g)(g \otimes k), \\ g \otimes hk &= (g \otimes h)(g^h \otimes k^h) \end{aligned}$$

Здесь $h^g = ghg^{-1}$.

Внешний квадрат группы $G \wedge G$ определяется как фактор $G \otimes G$ по соотношениям $g \otimes g = e$.

Пользуясь функториальностью тензорного и внешнего квадратов, а также свойствами этих функторов, можно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть G обладает циклически упорядочиваемым или упорядочиваемым центральным расширением. Если $H_2(G)$ не имеет кручения, то группа $G \wedge G$ циклически упорядочиваема или упорядочиваема соответственно.

Следствие 1. Если G циклически упорядочиваема и $H_2(G)$ не имеет кручения, тогда $G \wedge G$ упорядочиваема.

Следствие 2. Если G циклически упорядочиваема и $H_2(G)$ не имеет кручения, а $H_1(G)$ изоморфна \mathbb{Z}^n , тогда $G \otimes G$ упорядочиваема.

Таким образом, внешний и тензорный квадраты становятся эффективным инструментом для изучения циклической упорядочиваемости. В частности, они помогают ответить на вопрос, когда кручение в группе является препятствием к циклической упорядочиваемости.

Лемма 2. Если для некоторых $a, g \in G$ выполнено $a^n = [a, g] = e$, то $(a \otimes g)^n = e$.

Следствие 3. Пусть G такая группа, что $H_1(G)$ изоморфна \mathbb{Z}^n , а $H_2(G)$ не имеет кручения. Если $a^n = e$ и $a \otimes a \neq e$, тогда G не является циклически упорядочиваемой.

Рассмотрим частный случай, когда группа G получается как центральное расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$$

где A конечно порождена, а H конечна.

Теорема 3. Для такой группы G её тензорный квадрат либо имеет кручение, либо является группой Бибераха размерности $k \leq 2 \cdot \text{rank}(A \otimes_{\mathbb{Z}} G_{ab})$.

Следствие 4. Если в условиях Теоремы 3 потребовать, чтобы $G_{ab} \simeq A \simeq \mathbb{Z}$, то $G \otimes G$ не имеет кручения тогда и только тогда, когда $G \otimes G$ изоморфна либо \mathbb{Z} , либо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, либо фундаментальной группе бутылки Клейна.

Группы виртуальных узлов

Классические узлы определяются как классы эквивалентности вложений окружности в S^3 . Одним из основных инвариантов такого вложения является фундаментальная группа дополнения к узлу, назы-

ваемая группой узла. Известно, что группы узлов являются упорядочиваемыми.

Теория виртуальных узлов была определена Кауфманом в [4] как обобщение классической теории узлов. Как и в классической теории узлов, одним из основных вопросов является различение узлов между собой. По аналогии с классическим случаем, для виртуального узла можно определить его группу, которая является его инвариантом.

В работе [5] А. Ичимори вычислил группы виртуальных узлов из табуляции Дж. Грина и показал, что эти группы изоморфны либо бесконечной циклической группе, либо одной из данного списка:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \langle x, y \mid x y x = y x y \rangle, \\
 G_2 &= \langle x, a \mid x^{-1} a x = a^{-1}, a^3 = 1 \rangle, \\
 G_3 &= \langle x, y \mid x y x = y x y, y = x^{-3} y x^3 \rangle, \\
 G_4 &= \langle x, y \mid x^{-1} y x y^{-1} x = y x^{-1} y x y^{-1} \rangle, \\
 G_5 &= \langle x, a \mid x^{-1} a x = a^{-1}, a^5 = 1 \rangle, \\
 G_6 &= \langle x, a \mid x^{-1} a x = a^2, a^5 = 1 \rangle, \\
 G_7 &= \langle x, y \mid x^{-1} y x = y^{-1} x y \rangle, \\
 G_8 &= \langle x, a \mid x^{-1} a x = a^2, a^7 = 1 \rangle, \\
 G_9 &= \langle x, y \mid x y x y^{-1} x^{-1} = y x^{-1} y x y^{-1}, x^{-1} y^{-1} x y x = y^{-1} x^{-1} y x y \rangle.
 \end{aligned}$$

Используя Теоремы 2,3 и следствия из них, удастся получить следующий результат.

Теорема 4. Для любого узла из табуляции Дж. Грина его группа либо упорядочиваема и изоморфна \mathbb{Z} , G_1 , G_4 , G_7 или G_9 , либо не циклически упорядочиваема и изоморфна G_2 , G_3 , G_5 , G_6 или G_8 .

Список литературы

1. Bell J., Clay A., Ghaswala T. Promoting circular-orderability to left orderability // *Annales de l'Institut Fourier*. – 2021. – Vol. 71(1). – P. 175–201.
2. Clay A., Ghaswala T., Circularly ordering direct products and the obstruction to left orderability // *Pacific J. of Math*. – 2021. – Vol. 312(2). –P. 401–419.
3. Brown R., Johnson D.L., Robertson E.F. Some computations of non-abelian tensor products of groups // *J. Algebra*. – 1987. – Vol. 111(1). – P. 177–202.
4. Kauffman L.H. Virtual knot theory // *Eur. J. Combin*. – 1999. – Vol. 20. – P. 663–690.
5. Ichimori A. Ribbon torus knot presented by virtual knots / Master's Thesis (in Japanese). – Osaka City University, 2011.
6. Кузьмин Ю.В. Гомологическая теория групп – М. : Факториал, 2006. – 352 с.

CIRCULAR ORDERABILITY AND GROUPS OF VIRTUAL KNOTS

M.E. Ivanov

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

4 Acad. Koptyug avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: m.ivanov2@g.nsu.ru

Annotation. For a group G , its tensor square $G \otimes G$ and exterior square $G \wedge G$ and their connection with the property of circular orderability are considered. Under certain assumptions about the homology groups $H_1(G)$ and $H_2(G)$ of a circularly orderable group G , it is proved that $G \otimes G$ and $G \wedge G$ are orderable. Thus, torsion in a group that lifts to torsion in $G \wedge G$ or $G \otimes G$ is an obstacle to circular orderability. The results obtained were applied to study groups of virtual knots.

Keywords: orderable groups, circular orderability, non-abelian tensor product, virtual knots.

УДК 539.37:691.32

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИСПЕРСНО- УПРОЧНЁННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Е.А. Иванов¹, О.И. Данейко^{1,2}, О.В. Матвиенко^{1,2}

¹Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

²Томский государственный архитектурно-строительный университет, Россия, г. Томск, пл. Соляная, 2, 634003

E-mail: olya_dan@mail.ru

Аннотация. Методами математического моделирования исследована эволюция дефектной подсистемы дисперсно-упрочнённого материала в зависимости от температуры и скорости деформации. Определены параметры модели Джонсона–Кука, позволяющей рассчитать прочность технологических устройств при их проектировании.

Ключевые слова: дисперсно-упрочненные материалы, пластическая деформация, математическое моделирование.

Введение. Развитие современной авиации, энергетики, строительства и других отраслей промышленности требует разработки новых высокоэффективных сплавов, обеспечивающих надежность и долговечность технологических устройств [1]. Эти материалы должны обладать высокой прочностью с достаточным запасом пластичности [2, 3].

Особый интерес представляют дисперсно-упрочненные сплавы, в матрице которых распределены наноразмерные частицы [4, 5], которые проявляют уникальные свойства по сравнению с традиционными сплавами [6, 7]. Эффективность упрочнения зависит от вида частиц, их объемной доли и от равномерности распределения в матрице. Прочностные характеристики дисперсно-упрочненных материалов зависят также от температуры и скорости деформации [8, 9].

Для определения прочностных характеристик материала необходимо иметь экспериментальные данные или результаты математического моделирования поведения материалов при различных условиях нагружения и температурах. Известно [10], что наиболее точное описание пластических деформаций с точки зрения физики явления и количественных характеристик дает дислокационная модель пластичности.

Постановка задачи. В основе модели пластической деформации материалов лежит концепция упрочнения и отдыха. В дисперсно-упрочнённых сплавах дефектная структура зоны сдвига сложнее, чем в

чистых металлах. Взаимодействие дислокаций с частицами в процессе пластической деформации помимо упрочняющего эффекта приводит к появлению ряда новых элементов дислокационной структуры [11, 12]. Вместе с генерацией сдвигообразующих дислокаций в этом случае развиваются элементарные процессы, обусловленные взаимодействием дислокаций с частицами и порождающие кольца Орована, призматические петли, дипольные конфигурации. Между структурными элементами в ходе деформации и последующих релаксационных процессов возможны взаимные превращения, которые зависят от соотношения масштабных характеристик упрочняющей фазы и расстояния между дислокациями.

При моделировании процесса пластической деформации и деформационного упрочнения предполагается, что в процессе пластического сдвига дисперсно-упрочненных материалов с ГЦК-матрицей, содержащих некогерентную дисперсную фазу, формируется зона сдвига и образуются следующие типы деформационных дефектов: линейные – сдвигообразующие дислокации (их плотность обозначена ρ_m), призматические петли вакансионного ρ_p^v и межузельного ρ_p^i типа, дислокационные диполи вакансионного ρ_d^v и межузельного ρ_d^i типа, точечные деформационные дефекты – межузельные атомы (концентрация c_i), моновакансии (концентрация c_v), бивакансии (концентрация c_{2v}) [13, 14].

Таким образом, уравнения баланса элементов деформационной дефектной среды могут быть записаны в виде [15, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_m}{da} &= (1 - \omega_s P_{as}) \frac{F}{Db} - \frac{2}{\dot{a}} (1 - \omega_s) \rho_m^2 b \min(r_a, \rho_m^{-1/2}) (c_{2v} Q_{2v} + c_{1v} Q_{1v} + c_i Q_i) + \\ &+ \frac{2\alpha}{\dot{a}} b \sqrt{\rho} (\rho_p^v (c_{1v} Q_{1v} + c_{2v} Q_{2v}) + \rho_p^i c_i Q_i) + \frac{2b}{\dot{a} r_a} (\rho_d^i c_i Q_i + \rho_d^v (c_{1v} Q_{1v} + c_{2v} Q_{2v})), \\ \frac{d\rho_p^i}{da} &= \frac{\langle \chi \rangle \delta}{2\Lambda_p^2 b} - \frac{2\alpha}{\dot{a}} \sqrt{\rho} \rho_p^i b (2c_{2v} Q_{2v} + c_i Q_i + 2c_{1v} Q_{1v}), \\ \frac{d\rho_p^v}{da} &= \frac{\langle \chi \rangle \delta}{2\Lambda_p^2 b} - \frac{2\alpha}{\dot{a}} \sqrt{\rho} \rho_p^v b (c_{2v} Q_{2v} + 2c_i Q_i + c_{1v} Q_{1v}), \\ \frac{d\rho_d^v}{da} &= \frac{1}{\Lambda_p b} - \frac{2b}{\dot{a} r_a} \rho_d^v (c_{2v} Q_{2v} + c_i Q_i + c_{1v} Q_{1v}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_d^i}{da} = \frac{1}{\Lambda_p b} - \frac{2b}{\dot{a}r_a} \rho_d^i (c_{2v} Q_{2v} + c_i Q_i + c_{1v} Q_{1v}),$$

$$\frac{dc_i}{da} = q \frac{\tau_{dyn}}{G} - \frac{c_i}{\dot{a}} [((1-\omega_s)\rho_m + \rho_p + \rho_d)b^2 Q_i + Q_{1v}c_{1v} + Q_{2v}c_{2v} + Q_i(c_{1v} + c_{2v})],$$

$$\frac{dc_{1v}}{da} = \frac{q\tau_{dyn}}{6G} - \frac{1}{\dot{a}} [(((1-\omega_s)\rho_m + \rho_p + \rho_d)b^2 + c_i + c_{1v})Q_{1v}c_{1v} + Q_i c_i c_{1v} - (Q_{2v} + Q_i)c_i c_{2v}],$$

$$\frac{dc_{2v}}{da} = \frac{5q\tau_{dyn}}{6G} - \frac{1}{\dot{a}} [(((1-\omega_s)\rho_m + \rho_p + \rho_d)b^2 + c_i)Q_{2v}c_{2v} + Q_i c_i c_{2v} - Q_{1v}c_{1v}^2],$$

$$\dot{a} = \dot{a}_0 \exp\left[-\frac{0,2Gb^3 - (\tau - \tau_a)\Lambda b^2}{kT}\right].$$

Здесь a – деформация сдвига; \dot{a} – скорость деформации; D – диаметр зоны сдвига; F – параметр, определяемый формой дислокационных петель и их распределением в зоне сдвига; τ_{dyn} – напряжение, избыточное над статическим сопротивлением движению дислокаций; Q_j – кинетический коэффициент; k – постоянная Больцмана; T – температура деформирования; ω_s – доля винтовых дислокаций; $\langle\chi\rangle$ – средняя величина параметра, характеризующего “геометрию” дислокаций на частицах; Λ_p – расстояние между частицами второй фазы, δ – размер частиц; q – параметр, определяющий интенсивность генерации точечных дефектов; G – модуль сдвига, b – модуль вектора Бюргерса, ρ – плотность дислокаций, α – параметр междислокационных взаимодействий; Λ – длина свободного сегмента подвижной дислокации. Атермическая составляющая сопротивления движению дислокаций τ_a в дисперсно-упрочнённом сплаве с некогерентными частицами обусловлена напряжением трения τ_f , взаимодействием с реагирующими дислокациями леса τ_d и напряжением обхода частиц τ_{Or} : $\tau_a = \tau_f + \tau_d + \tau_{Or}$.

Проведены расчёты для дисперсно-упрочнённого материала с алюминиевой матрицей и некогерентными недеформируемыми частицами диаметром 10 нм, которые расположены на расстоянии 100 нм друг от друга. Варьировались скорости деформации в пределах от 10^{-4} с^{-1} до 10^{-2} с^{-1} при трёх температурах (193, 293 и 393 К). Начальная плотность сдвигообразующих дислокаций задавалась соответствующей состоянию недеформированного кристалла, при этом предполагалось отсутствие дислокационных призматических петель и дислокаций

в дипольных конфигурациях. Начальная концентрация точечных дефектов соответствовала концентрации термодинамически равновесных точечных дефектов при данной температуре.

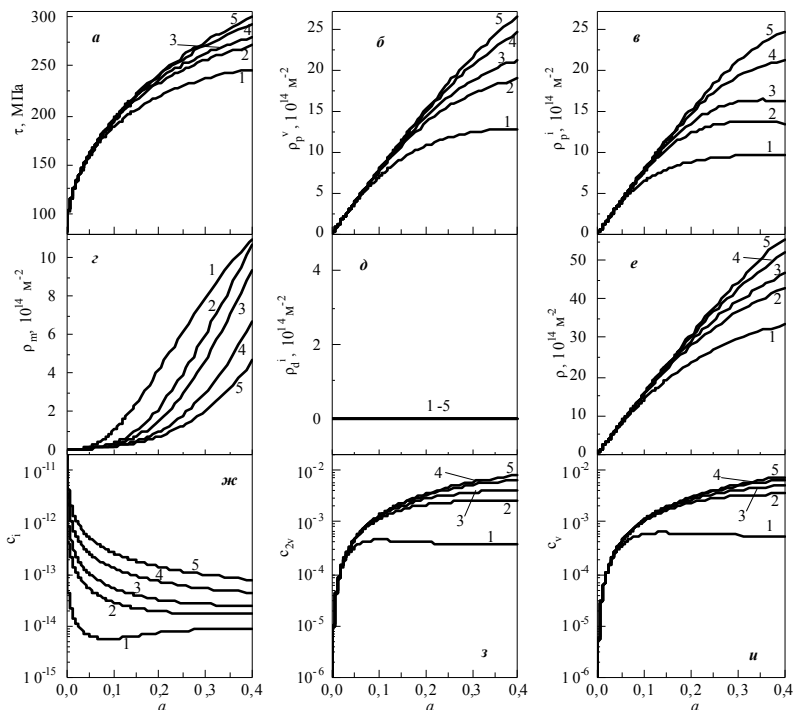


Рис. 1. Кривые деформационного упрочнения (а) и зависимость от степени деформации плотностей сдвигообразующих дислокаций (г), призматических петель вакансионного (б) и межузельного (в) типа, дислокаций в дипольных конфигурациях (д), суммарной плотности дислокаций (е) и концентрации межузельных атомов (ж), бивакансий (з) и моновакансий (и) при скоростях деформации, c^{-1} : кр. 1 – 0,0001; кр. 2 – 0,001; кр. 3 – 0,002; кр. 4 – 0,005; кр. 5 – 0,01. Температура 193 К

Результаты. Получены зависимости плотности составляющих дислокационной подсистемы (сдвигообразующих дислокаций, призматических петель вакансионного и межузельного типа, дислокаций в дипольных конфигурациях вакансионного и межузельного типа) и концентрации точечных дефектов (межузельных атомов, бивакансий и

моновакансий) от степени деформации, а также кривые деформационного упрочнения.

При низких (193 К) температурах в процессе деформации растут плотности сдвигообразующих дислокаций (рис. 1, *з*) и дислокаций в призматических петлях вакансионного (рис. 1, *б*) и межузельного (рис. 1, *в*) типа. Соответственно, растёт суммарная плотность дислокаций (рис. 1, *е*) и напряжение течения (рис. 1, *а*). Выявлено, что увеличение скорости деформации приводит к увеличению плотности дислокаций в призматических петлях (рис. 1, *б*, *в*) и уменьшению плотности сдвигообразующих дислокаций (рис. 1, *а*). Концентрация точечных дефектов всех типов увеличивается при увеличении скорости деформации (рис. 1, *ж*, *з*, *и*). Причём концентрация межузельных атомов (рис. 1, *ж*) значительно ниже, чем концентрация вакансий (рис. 1, *и*) и бивакансий (рис. 1, *з*), потому что межузельные атомы значительно более подвижны при низких температурах.

Следует отметить, что дипольные дислокационные конфигурации не образуются в процессе деформации в материале с данным размером частиц при любых температурах и скоростях деформации.

При температуре 293 К качественный вид кривых зависимости от степени деформации плотностей призматических петель (рис. 2), суммарной плотности дислокаций и напряжения течения такой же, как при более низкой температуре 193 К. Однако, выход на насыщение происходит при более низких степенях деформации. Вид кривых зависимости плотностей сдвигообразующих дислокаций от степени деформации отличается от аналогичных кривых для температуры 193 К. При этом численные значения плотности сдвигообразующих дислокаций при температурах 193 и 293 К сравнимы. А плотности дислокаций в призматических петлях, как и суммарной плотности дислокаций значительно ниже при более высоких температурах. Концентрация межузельных атомов с увеличением температуры практически не изменяется. Концентрация вакансий и бивакансий уменьшается при увеличении температуры.

Описанные выше тенденции сохраняются при температуре 393 К. Однако, влияние скорости деформации на плотности составляющих дислокационной подсистемы и на напряжение течения менее выражено. При этом численные значения плотностей дислокаций становятся ниже при данной температуре, особенно это заметно для высоких скоростей деформации.

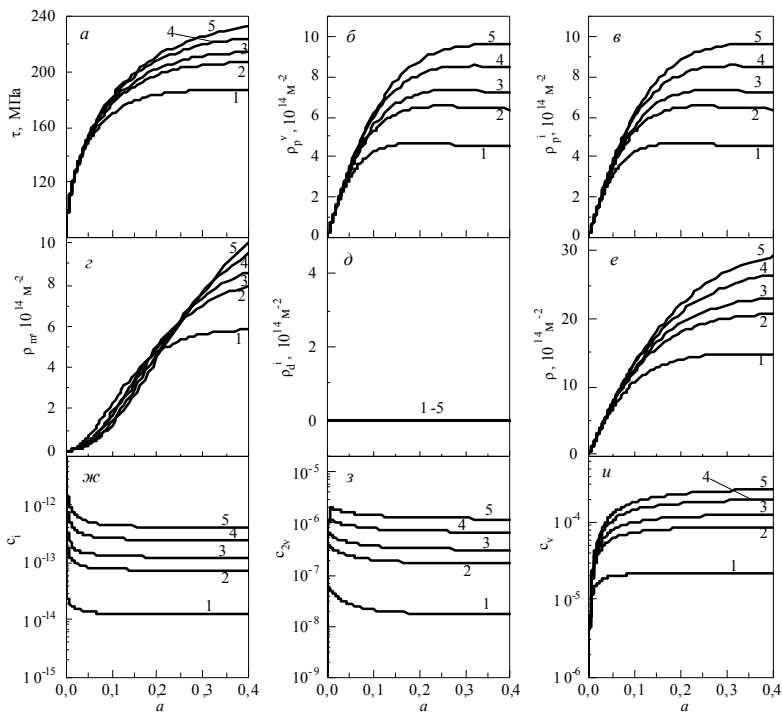


Рис. 2. Кривые деформационного упрочнения (а) и зависимость от степени деформации плотностей сдвигообразующих дислокаций (г), призматических петель вакансионного (б) и межзельного (в) типа, дислокаций в дипольных конфигурациях (д), суммарной плотности дислокаций (е) и концентрации межзельных атомов (ж), бивакансий (з) и моновакансий (и) при скоростях деформации, с⁻¹: кр.1 – 0,0001; кр. 2 – 0,001; кр. 3 – 0,002; кр. 4 – 0,005; кр. 5 – 0,01. Температура 293 К

Напряжение течения увеличивается с ростом деформации при всех рассмотренных температурах и скоростях деформации, что свидетельствует об упрочнении материала. С увеличением скорости деформации напряжение течения возрастает. Это наиболее заметно при низких температурах. С увеличением температуры напряжение течения уменьшается, и выход кривых течения на насыщение происходит при более низких степенях деформации. Это свидетельствует о повышении пластических свойств материала.

Одной из центральных задач при изучении механических свойств материалов является создание определяющих соотношений,

которые могут описывать механическую реакцию материалов при различных условиях нагрузки. Они должны включать критерий текучести, закон упрочнения и зависимость напряжения не только от величины деформации, но и от ее скорости и отражает материальные характеристики конкретных материалов, что особенно важно для проектирования прочности и расчета применения материалов.

Из известных моделей пластических деформаций материала наибольшей привлекательностью обладает модель Джонсона-Кука, учитывающая как кинематическое упрочнение, так и разогрев деформируемого материала. Модель Джонсона-Кука является эмпирической и позволяет учитывать эффекты упрочнения, зависимость напряжения от скорости деформирования и температуры [17, 18]:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + B\varepsilon^n) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_M - T_0} \right)^m \right). \quad (2)$$

В уравнении (2) σ – интенсивность напряжений, ε – пластическая деформация, $\dot{\varepsilon}$ – скорость пластической деформации, T – температура, $T_M = 660$ К – температура плавления, σ_0 , B , C , m , n – параметры модели, определяемые на основе экспериментальных данных или результатов математического моделирования. Параметр модели σ_0 – предел текучести при скорости деформации $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-4}$ с⁻¹ и температуре $T_0 = 293$ К. Параметр m учитывает явление термического разупрочнения материала. Параметры модели B и n характеризуют упрочнение материала при деформации, C характеризует изменение предела текучести в результате динамического воздействия и изменения скорости деформации.

Для определения параметров модели Джонсона-Кука используется метод наименьших квадратов (МНК). Для этого с использованием описанной выше модели деформационного упрочнения и эволюции деформационной дефектной среды в дисперсно-упрочненных материалах рассчитаны напряжения в диапазоне изменения пластических деформаций $0 \leq \varepsilon \leq 0.15$ с шагом $\Delta\varepsilon = 0.001$, скорости деформации $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}$, 10^{-3} , $2 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} с⁻¹, температуры $T = 193$, 293 , 393 К. В соответствии с принципом МНК в заданном классе функций находится функция, для которой выполняется условие: сумма квадратов отклонений данных регрессионной зависимости от «теоретических» τ должна быть минимальной. Это требование записывается следующим образом:

$$S = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^{160} \left(\tau_{i,j,k} - \sigma_0 (1 + B \epsilon_i^n) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}_j}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T_k - T_0}{T_M - T_0} \right)^m \right) \right)^2 \rightarrow \min .$$

Задача сводится к нахождению минимума функции 5 переменных (по числу неизвестных параметров). Для нахождения экстремума функции необходимым условием является равенство нулю частных производных функции S по каждому из параметров:

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0. \quad (3)$$

В результате были определены искомые параметры и предложена следующая зависимость:

$$\sigma = 75 \left(1 + 4.05 \epsilon^{0.4} \right) \left(1 + 0.023 \ln \left(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_M - T_0} \right)^{2.4} \right). \quad (4)$$

Заключение. С помощью полученной зависимости могут быть решены различные задачи механики деформируемого твердого тела, учитывающие не только влияние величины и скорости деформации, но и неизотермичности процесса пластической деформации на формирование поля напряжений в деформируемом теле, что особенно важно для расчета прочности при проектировании технологических устройств.

Список литературы

1. Неклюдов И.М., Ожигов Л.С., Митрофанов А.С. и др. // Проблемы прочности. – 2011. – № 2. – С. 153–159.
2. Березовский В.В., Шавнев А.А., Ломов С.Б. и др. //Авиационные материалы и технологии. – 2014. – № 6. – С. 17–23.
3. Чудина О.В. Технологические пути повышения механических свойств сталей на основе структурной теории прочности // Технология металлов. – 2003. – № 6. – С. 16–23.
4. Мэтьюз Ф., Ролингс Р. Композитные материалы. — М. : Техносфера, 2004. – 408 с.
5. Новые материалы / под науч. ред. Ю.С. Карабасова. – М. : МИССИС, 2002. – 736 с.
6. Arnhold V., Hummert K. // New Materials by Mechanical Alloying Techniques : DGM Conference / E. Arzt, L. Schultz (eds). – Oberursel : DGM Inform. Verlag, 1989. – P. 263.
7. Weber J.H., Schelleng R.D. // Dispersion Strengthened Aluminum Alloys / ed. Y.-W. Kim, W.M. Griffith (eds). – Warrendale : TMS, 1988. – P. 468.
8. Stewart A.T., Martin J.W. Dislocation-particle interactions in plastically deformed two-phase aluminium crystals // Acta Met. – 1975(1). – Vol. 23 – P. 1–7.

9. Hymphreys F.J., Hirsch P.B. // *Pros. Roy. Soc. Lond.* – 1970. – Vol. A318. – No. 1532. – P. 73–92.
10. Унксов Е.П. Теория пластических деформаций металлов. – М. : Машиностроение. – 1983. – 598 с.
11. Matvienko O.V., Daneiko O.I., Kovalevskaya T.A. Plastic deformation of copper-based alloy reinforced with incoherent nanoparticles // *Russian Physics Journal.* – 2017. – Vol. 60, No. 2. – P. 236–248. – doi: 10.1007/s11182-017-1067-x.
12. Кулаева Н.А., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. и др. Влияние масштабных характеристик упрочняющей фазы со сверхструктурой $L1_2$ на эволюцию дислокационных диполей в процессе пластической деформации // *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки.* – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 1089–1092. – doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-3-1089-1092.
13. Данейко О.И., Кулаева Н.А., Ковалевская Т.А. и др. Исследование термического упрочнения ГЦК-материала, содержащего упрочняющие частицы со сверхструктурой $L1_2$ // *Известия вузов. Физика.* – 2015. – Т. 58, № 3. – С. 46–51.
14. Daneyko O.I., Kovalevskaya T.A., Kolupaeva S.N. et al. Influence of the temperature and strain rate on the evolution of the dislocation structure of a dispersion-hardened material with FCC matrix // *Russian Physics Journal.* – 2012. – Vol. 54, No. 9. – P. 989–993.
15. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Напряженно-деформируемое состояние нагруженной трубы из сплава, упрочненного некогерентными наночастицами // *Известия вузов. Физика.* – 2017. – Т. 60, № 4. – С. 7–13.
16. Матвиенко О.В., Данейко О.И., Ковалевская Т.А. Упругопластическая деформация трубы из дисперсно-упрочненного алюминия под действием внешнего и внутреннего давления // *Известия вузов. Физика.* – 2019. – Т. 62, № 4(736). – С. 144–151.
17. Johnson G.R., Cook W.N. A constitutive model and data for metals subjected to large strains. High rates and high temperatures // *Proc. of the 7th Intern. symp. on ballistics, Hague (Netherlands), 19–21 Apr. 1983.* – Hague: Roy. Inst. of Engrs in the Netherlands, 1983. – P. 541–547.
18. Johnson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures, and pressures // *Engng Fract. Mech.* 1985. – Vol. 21(1). – P. 31–48.

INFLUENCE OF TEMPERATURE AND STRAIN RATE ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF DISPERSE-STRENGTHENED MATERIALS

E.A. Ivanov¹, O.I. Daneyko^{1,2}, O.V. Matvienko^{1,2}

¹National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Ave., 30, 634050

²Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Russia, Tomsk, pl. Solyanaya, 2, 634003

E-mail: olya_dan@mail.ru

Abstract. The evolution of the defect subsystem of a dispersion-strengthened material was studied depending on temperature and strain rate using mathematical modeling. The parameters of the Johnson–Cook model are determined, which allows one to calculate the strength of technological devices during their design.

Keywords: disperse-strengthened materials, plastic deformation, mathematical modeling.

УДК 519.25

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРАНСФЕРНОЙ СТОИМОСТИ
ФУТБОЛИСТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ
РЕГРЕССИОННЫХ МЕТОДОВ
И АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

М.С. Коновалов, Т.В. Емельянова

Национальный исследовательский Томский государственный
университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: maks-konovlov18@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается исследование зависимости трансферной стоимости футболистов от различных факторов. Для решения задачи используются такие методы, как линейная регрессия, нелинейная регрессия и алгоритм случайного леса. Для оценки параметров модели в линейной регрессии используется метод наименьших квадратов, а в нелинейной регрессии – метод Левенберга–Марквардта. Проведенный сравнительный анализ показал, что наиболее эффективным методом в данной задаче оказался алгоритм случайного леса.

Ключевые слова. Линейная регрессия, нелинейная регрессия, алгоритм случайного леса, метод наименьших квадратов, метод Левенберга–Марквардта.

Введение. В современном спорте футбол является не просто спортивным видом деятельности, но также и настоящим бизнесом, где трансферные сделки, покупка и продажа игроков, играют одну из ключевых ролей. Прогнозирование трансферной стоимости футболистов становится все более значимым аспектом для клубов, агентов и инвесторов, стремящихся эффективно управлять своими финансовыми ресурсами и улучшить свое положение на рынке. С увеличением сумм трансферов, усилением конкуренции за талантливых игроков и постоянным изменением условий рынка, точное определение стоимости футболистов становится сложной и важной задачей.

Актуальность темы прогнозирования трансферной стоимости футболистов определяется необходимостью создания инструментов, способных предсказывать стоимость игроков с наибольшей точностью и учитывать множество факторов, влияющих на их цену. Точные прогнозы позволят заинтересованным сторонам принимать обоснованные решения, минимизировать риски и повысить эффективность своих трансферных операций. В этом контексте разработка и использование современных методов прогнозирования становится ключевым элементом успешного управления в сфере футбольного бизнеса.

Материалы и методы исследования. В качестве данных выступали атакующие игроки из пяти ведущих лиг Европы: Английская Премьер-лига, Испанская Ла Лига, Итальянская Серия А, Немецкая Бундеслига и французская Лига 1. Данные были собраны с сайта Transfermarkt [1].

Для анализа стоимости футболистов в исследовании использовались следующие методы:

1. *Линейная регрессия* [2]: данный метод применяется для выявления линейных зависимостей между трансферной стоимостью футболистов и различными факторами (например, число лет до истечения контракта, количество голов, возраст, популярность игрока и др.).

Параметры линейной модели $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k$ оценивались с использованием метода наименьших квадратов.

Оценки по этому методу имеют вид:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y,$$

где X – матрица значений признаков, а Y – вектор значений зависимой переменной.

2. *Нелинейная регрессия* [3]: данный метод применяется для выявления нелинейных зависимостей между факторами и трансферной стоимостью игроков. Нелинейная регрессия позволяет учесть сложные зависимости, которые линейная модель не может уловить.

Для оценки параметров в модели $y_i = f(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, n$ применяется метод Левенберга–Марквардта [3], который представляет собой итерационный процесс минимизации суммы квадратов отклонений, в котором каждое следующее приближение задается по формуле:

$$a^{k+1} = a^k + (P_k^T P_k + \mu_k I)^{-1} P_k^T (y - f(a^k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \mu_k > 0,$$

где $P_k = \left. \frac{\partial f}{\partial \beta} \right|_{\beta=a^k}$, I – единичная матрица.

Так как процесс итерационный, то ему нужно задать начальное приближение. В работе было задано начальное приближение: $a^0 = 0$.

Процесс итерации заканчивается, когда выполняется следующее условие:

$$|a^{k+1} - a^k| < \delta$$

На практике значения δ выбирают равным 10^{-5} .

3. *Случайный лес* [4]: этот метод машинного обучения является ансамблевым и строит несколько деревьев решений на случайных подвыборках данных, объединяя их для получения точного прогноза. Случайный лес обычно хорошо подходит для задач прогнозирования трансферной стоимости. Алгоритм случайного леса включает следующие этапы:

1. Определим, как прогнозируемое значение может быть вычислено отдельным деревом решений.

Пусть n_l обучающих примеров (x_i, y_i) с индексами из множества R_l , то есть $i \in R_l$, попадает в l -ую вершину (лист) дерева. Тогда прогнозируемое значение $g = f(x)$ нового примера, который попал в эту же вершину вычисляется как

$$g = f(x) = \frac{1}{n_l} \sum_{i \in R_l} y_i$$

2. Пусть T – число обученных деревьев. Тогда прогнозируемое значение случайного леса вычисляется по формуле $g_{сл} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g^{(t)}$

Для оценки точности модели использовалась функция потерь в виде суммы квадратов остатков. Также точность прогнозов оценивалась с помощью различных метрик, таких как коэффициент детерминации, рассчитанный по формуле: $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ и среднеквадратическая ошибка:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

Данные были разделены на обучающую выборку (80% от общего объема данных) и тестовую выборку (20%), что позволило оценить способность модели к прогнозированию на новых данных после завершения процесса обучения.

Результаты. С помощью корреляционного анализа были выявлены факторы, которые оказывают значимое влияние на трансферную стоимость футболиста: число лет до истечения контракта; количество голов, забитых игроком за сезон; число игр, сыгранных в Лиге чемпионов; возраст; количество подписчиков, и футболист играет в Английской Премьер-Лиге.

В таблице 1 приведены результаты значений MSE и R^2 для обрабатываемых данных.

Таблица 1.
Сравнение моделей

| Методы | MSE | R^2 |
|----------------------|--------|-------|
| Линейная регрессия | 0.2031 | 0.69 |
| Нелинейная регрессия | 0.2042 | 0.69 |
| Случайный лес | 0.1916 | 0.71 |

Из таблицы 1 видно, что для обеих характеристик качества модели, алгоритм случайного леса оказывается наиболее эффективным, однако качество сравнимо и с другими методами.

На рисунке 1 представлены графики предсказанной трансферной стоимости (оранжевым цветом) и истинных ее значений (синий цвет) с помощью алгоритма случайного леса.

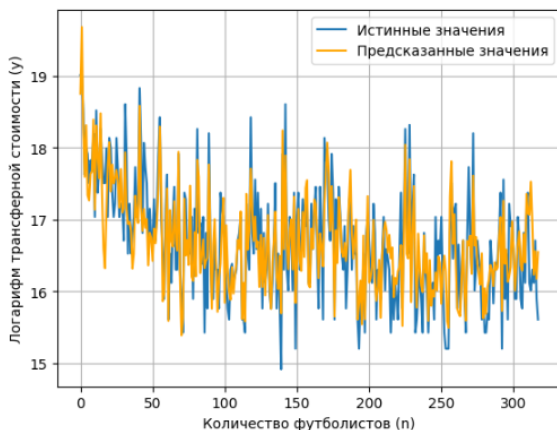


Рис. 1 Сравнение предсказанной и истинной стоимости футболистов

Заключение. В данной работе были рассмотрены различные методы прогнозирования трансферной стоимости футболистов, включая линейную и нелинейную регрессию, а также алгоритмы машинного обучения, такие как случайный лес. Анализ данных о футболистах из топ-5 европейских лиг позволил выявить ключевые факторы, влияющие на их рыночную стоимость. Применение линейной и нелинейной регрессии показало хорошие результаты, позволило выявить как простые, так и более сложные взаимосвязи между факторами и трансферной стоимостью игроков. Однако, наилучшие результаты были достигнуты при использовании алгоритма случайного леса. Этот метод показал самую высокую точность предсказания, что подтверждается его способностью учитывать сложные и нелинейные зависимости в данных. Модель случайного леса продемонстрировала свою эффективность в сравнении с другими методами и оказалась наиболее точной для прогнозирования трансферной стоимости футболистов. Это делает её ценным инструментом для футбольных клубов и агентов, которые стремятся более точно оценивать рыночную стоимость игро-

ков при проведении трансферных сделок. Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на более глубокий анализ влияния дополнительных факторов на трансферную стоимость, а также на улучшение существующих моделей с учетом новых данных и передовых методов прогнозирования.

Список литературы

1. Transfermarkt [Electronic resource]. – URL: <https://www.transfermarkt.world>.
2. Демиденко Е.З. Оптимизация и регрессия. – М. : Наука, 1989. – 296 с.
3. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 297 с.
4. Breiman L. Random forests // Machine learning. – 2001. – Vol. 45(1). – P. 5–32.
5. Breiman L. Bagging predictors // Machine learning. – 1996. – Vol. 24(2). – P. 123–140.

FORECASTING THE TRANSFER VALUE OF FOOTBALL PLAYERS USING VARIOUS REGRESSION METHODS AND MACHINE LEARNING ALGORITHMS

M.S. Kononov, T.V. Yemelyanova

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: maks-kononov18@mail.ru

Abstract. This document examines the study of the transfer cost of football players from various factors. Methods such as linear regression, nonlinear regression and the random forest algorithm are used to solve the problem. The least squares method is used to estimate the model parameters in linear regression, and the Levenberg–Marquardt method is used in nonlinear regression. The comparative analysis showed that the random forest algorithm turned out to be the most effective method in this task.

Keywords: linear regression, nonlinear regression, random forest algorithm, least squares method, Levenberg–Marquardt method.

УДК 517.5.

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРАВИЛЬНЫХ n -УГОЛЬНИКОВ

А.А. Константинов, Г.Д. Садритдинова

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: minerthe7@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена созданию параметризации правильных многоугольников. Были введены и проанализированы два новых семейства функций sp_n и cs_n , отвечающих за построение правильных “единичных” n -угольников.

Ключевые слова: параметризация, правильные многоугольники.

Введение. Решенная в данной работе задача о параметризации правильного n -угольника для любого натурального n может быть полезна в различных областях математики, а также в прикладных задачах. До настоящего момента такая задача решена не была.

Параметризующие функции. Введем семейство функций

$$\rho = \sec\left(\operatorname{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3, \quad (1)$$

где $\operatorname{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right)$ — функция, дающая остаток от деления φ на $\frac{2\pi}{n}$, то

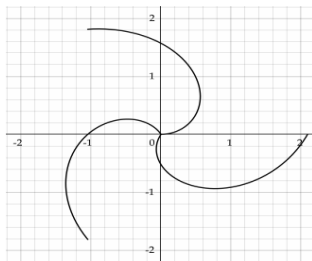
есть $\operatorname{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) = \varphi - \frac{2\pi}{n} \cdot \left[\frac{\varphi}{2\pi/n}\right], \quad \left[\frac{\varphi}{2\pi/n}\right]$ — целая часть при делении

φ на $\frac{2\pi}{n}$. В декартовой плоскости xOy , когда ρ и φ — полярные ко-

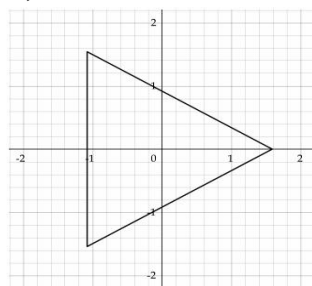
ординаты и $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, уравнение (1) задает правильный n -угольник, описывающий единичную окружность. Одна из вершин n -угольника находится в точке $A(1, 0)$, остальные вершины

получаются из нее поворотом на угол, кратный $\frac{2\pi}{n}$.

Например, при $n=3$ кривая $\rho = \operatorname{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right)$ показана на рисунке.



На следующем рисунке показана кривая с уравнением

$$\rho = \sec\left(\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right).$$


Так как радиус R описанной вокруг правильного n -угольника окружности связан с радиусом r вписанной окружности по формуле

$R = r \cdot \sec \frac{\pi}{n}$, а в нашем случае $r = 1$, то уравнение

$$rd_n(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sec\left(\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right) \quad (2)$$

в плоскости xOy описывает правильный n -угольник, вписанный в единичную окружность.

Введем еще два семейства функций

$$cs_n(\varphi) = rd_n(\varphi) \cdot \cos \varphi, \quad sn_n(\varphi) = rd_n(\varphi) \cdot \sin \varphi, \quad (3)$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Утверждение. Уравнения (3) в декартовой плоскости xOy , когда $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, задают координаты текущей точки n -угольника, описываемого уравнением (1).

Доказательство. Рассмотрим две соседние вершины $A(1,0)$ и $B\left(cs_n\left(\frac{2\pi}{n}\right), sn_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)$ правильного многоугольника, описываемого уравнением (1), и покажем, что текущая точка $M(cs_n(\varphi), sn_n(\varphi))$, $\forall \varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$, принадлежит стороне данного многоугольника, проходящей через эти вершины. В этом случае уравнение прямой должно иметь вид

$$\frac{cs_n(\varphi) - 1}{cs_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1} = \frac{sn_n(\varphi)}{sn_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)},$$

$$sn_n\left(\frac{2\pi}{n}\right)cs_n(\varphi) - sn_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - sn_n(\varphi)cs_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) + sn_n(\varphi) = 0.$$

Используя формулы (3) и тот факт, что $rd_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1$, получим

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)cs_n(\varphi) - \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)sn_n(\varphi) + sn_n(\varphi) = 0,$$

$$rd_n(\varphi)\left(\sin\frac{2\pi}{n} \cdot \cos\varphi - \cos\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\varphi\right) + sn_n(\varphi) - \sin\frac{2\pi}{n} = 0.$$

Применим формулу (2), учитывая, что

$$\sec\left(\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right) = \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right)$$

при $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$. Будем иметь

$$\cos\frac{\pi}{n} \cdot \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) + sn_n(\varphi) - \sin\frac{2\pi}{n} = 0,$$

$$\cos\frac{\pi}{n} \cdot \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) + \cos\frac{\pi}{n} \cdot \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\varphi = \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$2\cos\frac{\pi}{n} \cdot \sec\left(\varphi - \frac{\pi}{n}\right) \sin\frac{\pi}{n} \cos\left(\frac{\pi}{n} - \varphi\right) = \sin\frac{2\pi}{n},$$

$$2\cos\frac{\pi}{n} \sin\frac{\pi}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Аналогичным образом, можно рассмотреть оставшиеся стороны, или же, представить произвольный угол φ через некоторый угол $\varphi_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$, такой что $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{n}$, $k = \overline{1, n-1}$. Таким образом, доказательство о параметризации сторон сведётся к предыдущему, благодаря функции остатка по делению.

Свойства параметризующих функций. В процессе изучения введенных функций, удалось вывести их некоторые свойства.

Таблица 1

Свойства функций

| ФУНКЦИЯ | $rd_n(\varphi)$ | $sn_n(\varphi)$ | $cs_n(\varphi)$ |
|---------------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|
| Область определения | \mathbb{R} | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| Область значений | $\left[\cos \frac{\pi}{n}, 1\right]$ | $[-1, 1]$ | $[-1, 1]$ |
| Чётность | Чётная | Нечётная | Чётная |
| Периодичность | $T = \frac{2\pi}{n}$ | $T = 2\pi$ | $T = 2\pi$ |

Исследуем функцию $rd_n(\varphi)$ на непрерывность. Для этого рассмотрим сначала функцию $m(\varphi) = \text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right)$. Так как

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{2\pi k}{n} + 0} \text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) = 0, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \frac{2\pi k}{n} - 0} \text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2\pi}{n} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

то в точках $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$ функция $m(\varphi)$ не является непрерывной. Для

$\forall \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ функция $m(\varphi)$ будет непрерывна. Действительно,

зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$, и $\varphi, \varphi_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, такие,

что $|\varphi - \varphi_0| < \frac{2\pi}{n}$. Пусть $\left|\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \text{mod}\left(\varphi_0, \frac{2\pi}{n}\right)\right| < \varepsilon$. Так как

$\left| \text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \text{mod}\left(\varphi_0, \frac{2\pi}{n}\right) \right|$ принимает значения в промежутке $\left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, то повторное применение функции $m(\varphi)$ не изменит значение функции. Следовательно, $\left| \text{mod}\left(\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \text{mod}\left(\varphi_0, \frac{2\pi}{n}\right), \frac{2\pi}{n}\right) \right| < \varepsilon$. В силу свойства дистрибутивности функции $m(\varphi)$ последнее неравенство переписется в виде $\left| \text{mod}\left(\varphi - \varphi_0, \frac{2\pi}{n}\right) \right| < \varepsilon$. Тогда при $\delta = \varepsilon$ из условия $|\varphi - \varphi_0| < \delta$ следует $\left| \text{mod}\left(\varphi - \varphi_0, \frac{2\pi}{n}\right) \right| < \varepsilon$.

Поскольку функция $m(\varphi)$ принимает значения в промежутке $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right)$, то $-\frac{\pi}{n} \leq \text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$. Следовательно, функция

$$rd_n(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sec\left(\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{n}\right) \quad (n > 2)$$

непрерывна для $\forall \varphi \in \mathbb{R}$.

Функции $cs_n(\varphi)$ и $sn_n(\varphi)$ очевидно непрерывны $\forall \varphi \in \mathbb{R}$.

Исследуем функцию $rd_n(\varphi)$ на экстремумы. Условие, что $(rd_n(\varphi))'$ не существует приводит к уравнению $\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi(2+n)}{2n}$, анализ которого дает точки $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, являющиеся точками максимума функции радиуса. Условие $(rd_n(\varphi))' = 0$ приводит к уравнению $\text{mod}\left(\varphi, \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}$, которое дает точки $\varphi = \frac{\pi(2k+1)}{n}$, являющиеся точками локального минимума.

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : в 3 т. [Электронный ресурс]. – М. : Юрайт, 2023. – Т. 1. – 703 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/509733> (дата обращения: 07.06.2024).
2. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 3 т. [Электронный ресурс]. – М. : Юрайт, 2024. – Т. 2, кн. 1 – 396 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/537699> (дата обращения: 07.06.2024).
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа : в 3 т. [Электронный ресурс]. – М. : Юрайт, 2024. – Т. 2, кн. 2. – 323 с. – URL: <https://urait.ru/bcode/537700> (дата обращения: 07.06.2024).
4. Зорич В.А. Математический анализ. – Изд. 10-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – Ч. 1. – xii+564 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. – Изд. 9-е, испр. – М.: МЦНМО, 2019. – Ч. 2. – xii+676 с.

PARAMETRIZATION OF THE RIGHT N-GONS

A.A. Konstantinov, G.D. Sadritdinova

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: minerthe7@gmail.com

Abstract. This paper presents the process of parametrization for the right n -gons. Two new families of s_n and cs_n functions responsible for the construction of a right “unit” n -gons were derived and analyzed.

Keywords: parametrization, right polygons, n -gons.

УДК 51-3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

М.А. Крайнов

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Россия, Томск, пр. Ленина, 36, 634050

Томский государственный архитектурно-строительный Университет, Россия, Томск, Соляная площадь 2, 634003

E-mail: mikhailkraynov@mail.ru

Аннотация. Моделирование течений в пористых средах имеет важное значение в науках о земле. В настоящем обзоре рассматриваются существующие математические модели течения жидкости в керне, а также методы для численной реализации этих моделей. Целью обзора является выход к началу установления новой математической модели, применительно к задаче о течении воды и нефти в керне, на основании уже существующих. Такая модель будет учитывать актуальные исследовательские и расчётные проблемы в области теории фильтрации, а также физические и геометрические особенности того пространства.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, керн, двухфазное течение, уравнение Юнга–Лапласа, капиллярное давление, уравнение Ван Генухтена, трещиновато-пористые среды.

Введение. Моделирование многофазных течений в образцах пород различных нефтяных и нефтегазовых месторождений представляет собой крайне важную научно-практическую задачу для современно-добывающей отрасли. На данный момент существует ряд математических моделей, которые позволяют описывать течение в керне в приближённой постановке и без учёта изменения температуры. Также на предприятиях соответствующей отрасли существуют технические установки, позволяющие экспериментально определять характеристики пористых сред, необходимые для гидродинамического моделирования месторождений. Однако, проведение подобных экспериментов является дорогостоящей процедурой, на которую требуется много времени. По указанной причине, математическое моделирование данных явлений представляет собой актуальную задачу для нефтегазовой отрасли. Обзор поделён на две части, в первой из которых будут рассмотрены численные методы решения подобного рода задач, а также варианты работы с геометрической структурой и моделирование границ раздела фаз. Стоит отметить, что рассмотрена лишь некоторая часть из существующих моделей.

1. Численные методы. Наиболее распространённым методом моделирования подобного рода задач, является моделирование в масштабе пор. Уравнение Навье–Стокса (1.1) описывает движения вязкой ньютоновской жидкости и дополняется уравнением несжимаемости. Его численное решение позволяет описать движение жидкости в пористой среде. В переменных скорость – давление, уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -(\bar{v} \nabla) \bar{v} + \mu \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \nabla P + \bar{F} \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

где Δ – векторный оператор Лапласа; ∇ – оператор набла; μ – коэффициент кинематической вязкости; ρ – плотность; P – давление; \bar{F} – массовые силы.

Наиболее применимыми методами решения считаются: метод конечных объёмов (FVM), конечных элементов (FEM). Также, возможно применение метода конечных разностей (FDM), метода сглаженных частиц (SPH) и решёточный метод Больцмана (LBM) [1]. Выбор метода должен осуществляться в зависимости от решаемой задачи. Самым простым из перечисленных является метод конечных разностей, основным преимуществом которого является скорость построения разностной схемы, а также программная реализация. Его ключевым недостатком является проблематичное использование на неструктурированных сетках, по причине сложноустроенной геометрии, которую тяжело или невозможно описать с помощью конечно-разностной сетки [2]. Метод конечных элементов сложнее, чем МКР, но при этом его использование позволяет эффективнее работать с вычислительной сеткой, локально регулируя её структуру. Идея МКЭ состоит в том, что в начале собирается матрица Дирихле и масс, а затем происходит наложение граничных условий. После чего, решается полученная система линейных уравнений. Главный недостаток МКЭ заключается во влиянии размера расчётной сетки на окончательные результаты. Метод сглаженных частиц (SPH) гарантирует сохранение массы без дополнительных вычислений. Данный метод применяется для расчётов структуры течений с неизвестной свободной границей. Описание этого метода подробно описывается в работе Давыдова М.Н. и Кедринского В.К. [3]. В ситуации с моделированием внутри образца горной породы, свободная граница известна, и на ней заданы соответствующие граничные условия. Решёточный метод Больцмана не решает уравнение Навье–Стокса, а моделирует течение жидкости.

Метод конечных объёмов позволяет использовать сложные геометрические сетки с криволинейными границами, чем и является геометрическая структура ядра. Одним из основных достоинств метода конечных объёмов является то, что он основан на макроскопических физических законах. Кроме того, в отличие от FVM, при переходе от треугольных элементов сетки к полигональным, никаких изменений не предполагается.

2. Существующие научные труды и математические модели. В теории фильтрации существуют свои математические модели, созданию которых послужили возникшие задачи, которые требовали практически индивидуального подхода к своему решению. В основном, такие модели ориентированы на оптимизацию вычисления, как правило, путём упрощения геометрической постановки задачи, а также на увеличение скорости компьютерных вычислений. Стоит отметить, что учёные смогли добиться упрощения геометрии, не влияющее на полученные результаты. Тем не менее, работа в этом направлении ведётся до сих пор, а создание новых математических моделей движения жидкости в пористых средах по-прежнему является актуальным.

В работе Raеini A. Q., Blunt M. J., Bijeljic B. (2012) [4] представлена устойчивая схема моделирования многофазных течений, где размер области определяется в микромасштабах. Основная трудность заключалась в том, что разные силы проявляют себя по-разному на вычислительных сетках разных масштабов. Некоторые силы активны при наноразмерной толщине линий контакта, а другие, ответственные за диссипацию энергии, активны уже на более крупных масштабах. Авторами была получена новая формула, позволяющая проводить моделирование при очень низких капиллярных значениях, избегая нефизических скоростей. В самой статье содержится вывод о том, что при преобладании фиктивных течений над физическими потоками, моделирование при достаточно низких капиллярных значениях становится бессмысленным. Фиктивные течения, как правило, появляются вблизи границ раздела фаз при многофазном моделировании.

Ускорение вычислений – одно из важнейших задач в моделировании. В исследовании [5] представлен метод, позволяющий повысить количество рассматриваемых объёмов без создания излишних нагрузок на ЭВМ. Предложенная авторами методика заключается в упрощении геометрии пород. В таком упрощении нет негативной зависимости между достоверностью результата и скоростью моделирования процессов. Разработанная методика основана на методе вписанных сфер и медианных линий. Метод вписанных сфер – это алгоритм анализа геометрической картины и связности порового пространства оса-

дочных пород, представленный Д.Б. Силиным и Т. Patzek [6]. Применение метода медианных линий, или общей картины пустотного пространства описано в работе [7], где система пор рассматривается с точки зрения её топологических особенностей. Объекты рассматриваются отдельно, и для каждого из них происходит собственных геометрических характеристик. Стоит отметить, что многие относительно недавно разработанные методы является комбинацией классических методов, адаптированных под определённый спектр задач.

Сложность структуры порового пространства увеличивает вычислительную нагрузку и вынуждает упрощать геометрическое представление области, что приводит к непредсказуемым появлениям неопределённостей в полученных результатах. Для того, чтобы избежать негативных последствий упрощения геометрии области, выбирают небольшой участок межузлового пространства и для него осуществляют решение уравнения Навье–Стокса. Например, в работе [8] последовательно дискретизируемое пустотное пространство подразделяется сначала на отдельные поры, а затем на подэлементы, с их последующей сегментацией. То есть, работа с геометрической структурой и правильно составленный алгоритм параллельного вычисления влечёт увеличение скорости расчёта.

В своё время технологический прогресс в рентгеновской томографии позволил выводить математические модели течения жидкостей в пористых средах на новый уровень. Это повлияло на способность исследовать геометрическую картину исследуемого пространства в значительно большем разрешении. Примером такой работы можно считать исследование [9], где методом конечных разностей проводилось моделирование нестационарных течений в масштабе пор. Суть такого метода состояла в том, что на первом этапе определяются геометрические параметры в межузловом пространстве через локальное сопротивление потоку жидкости. На втором этапе, решается уравнение Лапласа для распределения давления и скорости жидкости в исследуемом пространстве. В работе [10] пористая среда моделировалась с учётом как механических свойств породы, так и её геометрической структуры. Представленная модель учитывает *динамические* геологические процессы осаждения и уплотнения зёрен. Исходная форма зёрен круглая в двухмерном и сферическая в трёхмерном изображении.

Моделирование границ раздела фаз играет особую роль в задачах моделирования двухфазных и многофазных течений. Отслеживание границ раздела фаз можно осуществить, например, через решёточный метод Больцмана путём введения специальных сил, которые

действуют между парами соседних узлов [11]. Такие силы включают в себя учёт функции тока и изменения плотности, а также коэффициенты узловых и диагональных направлений в сетке. Как было отмечено, при некоторых определённых зависимостях, функция тока зависит от плотности экспоненциально. В работе [12] представлена модель, в которой рассматривается способ отслеживания границы раздела между жидкими фазами. Данный способ основывается на том, что капиллярное давление представляется как разница давлений двух жидкостей – нефти и воды, что в свою очередь выводит на значение кривизны границы раздела и коэффициента межфазного натяжения нефть – вода. Вычисление местоположения границы раздела фаз можно осуществить через закон Дарси, где учитывается разница давлений на входе и выходе исследуемого образца, а также площадь поперечного сечения, фазовая проницаемость и общий расход каждой фазы. Предположительные распределения жидкостей и границы их разделов должны коррелировать с полученными экспериментальными данными. Любое полученное несоответствие указывает на неточность расчётов в определении границы раздела фаз.

В работе [13] учитывалось прогнозирование физических свойств, путём введения корреляционных функций. В такой функции рассматриваются две области, которую занимают две различные фазы. Предложенная авторами корреляционная функция вычисляет вероятность нахождения некоторого количества геометрических точек в пределах одной фазы. Похожая модель встречается в более ранней работе [14]. На основе трёхмерной модели некоторого песчаника создаётся реалистичная сеть пор и каналов. Далее, из уравнения Юнга–Лапласа (2.1) вычисляется капиллярное давление, которое возникает в результате искривления поверхности контакта двух жидкостей, в данном случае воды и нефти:

$$P_c = P_w - P_o = \sigma k \quad (2.1)$$

где P_c – капиллярное давление; P_w, P_o – давление со стороны воды и нефти; σ – коэффициент межфазного натяжения; k – кривизна линии.

В моделировании границ раздела фаз должны учитываться не только смещения, но и углы контакта, которые необходимы для поддержки капиллярного равновесия. В работе [15] представлен метод установки уровня (a level set method), который реализуется на базе решения уравнения Юнга–Лапласа и предположения, что известен контактный угол исследуемой системы флюидов. Местоположение твёрдой среды определяется через функцию тока, а границы смачи-

вающейся и не смачивающейся жидкости зависят как от функции потенциала скорости, так и от функции тока. Отрицательная функция тока указывает на то, что среда является твёрдой.

Существуют работы, в которых центральным из исследуемых физических свойств является относительная проницаемость. Учёт этого свойства является обязательным при рассмотрении одновременного течения несмешивающихся жидкостей, которыми как раз и являются вода и нефть. Методы относительной проницаемости можно разделить на два типа, а именно методы стационарного (SST) и нестационарного состояния (USS) [16]. Также существует метод центрифуги, в котором оцениваются кривые относительной проницаемости. Методы нестационарного состояния основан на вытеснении одной жидкости другой жидкостью, присутствующей в керне. В стационарном методе происходит одновременное введение в керн смачивающейся и не смачивающейся фазы до установления состояния равновесия, когда становится возможным оценить состояние флюидов. Относительная проницаемость рассматривается как функция насыщения смачивающей фазы. Связь межфазного натяжения и смачиваемости также влияет на относительную проницаемость [17]. В исследовании van Dijke и Sorbie рассматривается трёхфазное течение на основе уравнения Юнга–Лапласа в которое дополнительно входят радиусы входа пор и углы контакта. Косинусы углов контакта границ раздела определяют смачиваемость пор. Объединив эти косинусы, можно прийти к уравнению Бартелла–Остергофа (1927) (2.2):

$$\sigma_{gw} \cos \theta_{gw} = \sigma_{go} \cos \theta_{go} + \sigma_{ow} \cos \theta_{ow} \quad (2.2)$$

где σ_{gw} , σ_{go} , σ_{ow} – межфазное натяжение газ-вода, газ-нефть, нефть-вода; $\cos \theta$ – косинусы углов контакта.

Впервые на практике это уравнение применили Zhou и Blunt (1997). В самой же рассматриваемой статье пришли к выводу о том, что коэффициент межфазного натяжения для границы газ-вода будет больше, чем для границы нефть-вода, что в свою очередь повлияет на смачиваемость. Также замечено, что относительная проницаемость воды и нефти напрямую зависит от их собственных насыщенностей, которые, в свою очередь, зависят от распределения углов смачиваемости.

Существует метод [18], позволяющий прогнозировать относительную проницаемость и капиллярное давление, основываясь на данных о давлении. Создание этого метода обусловлено возникновению

поверхностных явлений в пористых средах, которые образуются из-за преимущественной смачиваемости поверхности поровых каналов. Это называется капиллярными эффектами, и их основная проблема заключается в негативном влиянии на полученные результаты. Представленный метод имеет экспериментальную основу. В изначально насыщенный водой керн закачивается нефть и вода. Для описания вытеснения нефти водой существует уравнение Кори–Бёрдина (2.3), в котором вводится пороговое давление или давление вытеснения.

$$P_c = P_d S_w - S_{iw} - S_{or}^{-1/\lambda} \quad (2.3)$$

где λ – постоянная для материала; P_d – пороговое давление; S – насыщенность; S_{iw} – пороговая водонасыщенность; S_{or} – остаточная водонасыщенность.

Интегрированием уравнения Дарси для нефти, авторам удалось получить точное значение падения давления в керне, которое происходит из-за отсутствия закачки воды. Также, рассмотренная модель демонстрирует способ одновременного расчёта капиллярного давления и проницаемости без учёта капиллярных эффектов.

Существуют математические модели, включающие в себя учёт деформации образцов горных пород в контексте общей оценки механических свойств. В работе [19] механические свойства фрагмента керна оцениваются на основании решения отдельных краевых задач. Происходят эти решения последовательно с помощью эффективного тензора деформаций и вычисления эффективного аффинора деформаций. Результатом будет получение эффективного тензора напряжений. В исследовании [20] рассматривались упругие свойства материалов, в которых модель сети пор построена случайным образом.

Многие их грунтовых пород по строению являются трещиновато-пористыми. Такие пространства имеют сложное строение, что вынуждает создавать и совершенствовать математические модели описания течения в такой среде. Исследование течений в таких средах принято проводить с разбиением области на пористые континуумы, в которых совокупность всех элементов будет рассматриваться как отдельная пористая среда [21]. В статье рассматриваются математические модели двойной пористости – альтернативное название моделей теории фильтрации трещиновато-пористых сред. За основу была взята модель Баренблатта, а рассматриваемые модели строились с учётом того, что основной поток будет проходить через трещины, запасая при этом большую часть флюида внутри пористой среды. Фильтрация в трещиновато-пористой среде также описывается в работе [22] в двух

вариантах: на основе осреднённой модели и через две неизвестные функции давления. Как и в предыдущем случае, в основе описания движения жидкости с двойной пористостью лежит модель Баренблатта. Далее, сравниваются полученные результаты на основе использования осреднённой модели, модели Баренблатта и двухмасштабной модели. В результате сравнений, авторы приходят к выводу о значительном различии в полученных результатов в двухмасштабной модели при некоторых отношениях коэффициентов проницаемости, чем в двух других моделях. Сходимость результатов достигается при уменьшении отношений проницаемости. Как уже отмечалось ранее, трещиновато-пористые структуры сложны по своему строению, что открывает новые математические модели, в которых учитывается все геометрические особенности таких пространств. Достаточно масштабное исследование двухфазного течения в трещиновато-пористой среде содержится в исследовании [23]. Кроме привычных параметров, математическая модель двухфазного течения в трещиновато-пористой среде включает в себя такие параметры, которые учитывают упругоёмкость среды и коэффициенты упругоёмкости трещин для каждой фазы. Так как в трещинах уменьшается роль капиллярных сил, за счёт чего создаётся условие вытеснения нефти водой. Созданная авторами численная модель учитывает более быстрое изменение насыщенности в трещинах, чем в блоках, что требует различия в вычислениях.

Известны математические модели, имеющие привязку к свойствам горных пород конкретного типа. Например, [24] рассмотрение трёхфазной фильтрации в аптских отложениях. Изначально были установлены необходимые значения пластового давления и давления насыщения при температуре, равные 14,65 МПа. Такое значение давлений говорит об изначальном нахождении залежей в насыщенном состоянии. Изменение относительных фазовых проницаемостей является основой для данной модели. Исследование [25] проведено для коллекторов Чайндинского нефтегазоконденсатного месторождения. Для достоверности результатов были отобраны породы одного типа, схожей структурой порового пространства и третьего класса проницаемости [26]. Относительная фазовая проницаемость зависит от трёх параметров: газовая проницаемость модели в пластовых условиях, газонасыщенности и коэффициента кинематической вязкости. Точность оценки её изменения достигается в исследовании единственного изменяемого параметра и учёта качественных и количественных изменений. Авторы получили шесть функций: две для определения фазовой проницаемости, две для насыщенностей и две для степеней кривизны функций относительной фазовой проницаемости. В итоге, по-

лучилась методика количественного оценивания влияния параметров фильтрации на параметры относительной фазовой проницаемости.

Уравнение Ван Генухтена (1980) использовалось для создания модели фильтрации с учётом деформации горизонтального пласта, проявляющейся в виде трещин [27]. Математическая модель включает в себя учёт атмосферного, капиллярного и порогового давления, параметры проницаемости и насыщенности, а также источниковые члены в балансе газа и жидкости. Особенностью модели является учёт напряжения в пористой среде, что в совокупности с учётом объёмной деформации, смещений точек, модулей Юнга и модулей упругости при сдвиге ведёт к получению модели линейно-упругой деформации. Уравнение Ван Генухтена (2.4) [28] используется для описания характеристической кривизны почвы и воды. При помощи генетического программирования [29] (GP) были получены уравнения для оценки параметров модели Ван Генухтена для смачиваемости и высыхаемости.

$$K_r(h_p) = \frac{\{1 - (\alpha h_p)^{n-1} [1 + (-\alpha h_p)^n]^{-m}\}^2}{[1 + (-\alpha h_p)^n]^{m/2}} \quad (2.4)$$

где α, m, n – параметры модели; K_r – коэффициент относительной водопроницаемости.

Существуют и другие модели Soil-water Characteristic Curves, например, модель Гарднера (2.5) [30] и Брукса–Кори (2.6) [31]:

$$K_r(h_p) = e^{\alpha h_p} \quad (2.5)$$

$$K_w = K_{wl} + (1 - K_{wl}) \cdot \left(\frac{P_{dis}}{P_k}\right)^{1/\lambda} \quad (2.6)$$

где K_{wl} – коэффициент остаточной влагонасыщенности; P_{dis} – давление вытеснения; λ – параметр кривизны.

Как выяснилось из практических исследований, модель Ван Генухтена будет предпочтительнее в описании формы характеристических кривых, так как является более гибкой в сравнении с остальными схожими моделями [32].

3. Заключение. Рассмотрены некоторые существующие математические модели описания движения жидкости и газа в пористых средах. Наиболее частой исследуемой средой был керн. В связи с тем, что керн представляет сложную геометрическую структуру, то приоритетным численным методом решения уравнения Навье–Стокса выступает метод конечных объёмов, так как он наиболее эффективен при

работе с неструктурированными сетками, однако не стоит исключать использование других численных методов. Была рассмотрена часть методов и уравнений, описывающие отслеживание границы раздела фаз, путём контроля капиллярного давления, нахождения коэффициентов межфазного натяжения, кривизны линий границы раздела и углов контакта между фазами. Одним из актуальных направлений в создании математических моделях гидродинамики на данный момент является моделирование границ раздела фаз. Наличие двух и более фаз требует особого учёта капиллярных сил. Остаётся актуальной оптимизация геометрического представления пространства, а также создание новых методов дополнительного исследования течений на границах пространства. Примеры моделей из обзора указывают на возможность дополнять традиционные методы решения параметрами, показывающими уникальность строения и физических свойств породы для которой проводится исследование.

Список литературы

1. Герке К.М., Корост Д.В., Карсанина М.В. и др. Изучение и анализ современных подходов к построению цифровых моделей ядра и методов моделирования многофазной фильтрации в масштабах порового пространства // Георесурсы. – 2021. – Т. 23, № 2. – С. 197–213. – doi: 10.18599/grs.2021.2.20.
2. Фирсов Д.К. Метод контрольного объёма на неструктурированной сетке в вычислительной механике : учебное пособие. – Томск : ТГУ, 2007. – 8 с.
3. Давыдов М.Н., Кедринский В.К. Метод сглаженных частиц в задачах в задачах моделирования кавитационного разрушения жидкости при ударно-волновом нагружении // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 17–26.
4. Raeni A.Q., Blunt M.J., Bijeljic B. (2012). Modelling two-phase flow in porous media at the pore scale using the volume-of-fluid method // Journal of Computational Physics. – 2012. – Vol. 231(17). – P. 5653–5668.
5. Лаврухин Е.В., Карсанина М.В., Измаилов А.Ф. и др. Увеличение объёмов численного моделирования в масштабе пор: метод разбиения на подкубы при выделении поросетевых моделей // Деловой журнал Neftegaz. – 2019. – № 7(91). – С. 70–75.
6. Silin D., Patzek T. Pore space morphology analysis using maximal inscribed spheres // Physica A: Statistical mechanics and its applications. – 2006. – Vol. 371(2). – P. 336–360. – doi: 10.1016/j.physa.2006.04.048.
7. Jiang Z., Wu K., Couples G. et al. Efficient extraction of networks from three dimensional porous media // Water Resources Research. – 2007. – Vol. 43(12), – Art. No. W12S03. – doi: 10.1029/2006wr005780.

8. Raeni A.Q., Bijeljic B., Blunt M.J. Generalized network modeling: Network extraction as a coarse-scale discretization of the void space of porous media // *Physical Review E*. – 2017. – Vol. 96(1). – Art. No. 013312.
9. Shabro V., Torres-Verdin C., Javadpour F. et al. Finite-difference approximation for fluid-flow simulation and calculation of permeability in porous media // *Transp. Porous Media*. – 2012. – Vol. 94. – P. 775–793. – doi:10.1007/s11242-012-0024-y.
10. Jin, G., Patzek T.W., Silin D.B. Physics-based reconstruction of sedimentary rocks // *Soc. Petrol. Eng.* – 2003. – 83587-MS
11. Куперштох А.Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решёточных уравнений Больцмана // *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*. – 2005. – Т. 5, вып. 3. – С. 29–42.
12. Raeni A.Q., Yang J., Bondino I. et al. Validating the generalized pore network model using micro-CT images of two-phase flow // *Transp. Porous Med.* – 2019. – Vol. 130. – P. 405–424.
13. Karsanina M.V., Gerke K.M., Skvortsova E.B. et al. Universal spatial correlation functions for describing and reconstructing soil microstructure // *PLoS ONE*. – 2015. – Vol. 10(5). – doi: 10.1371/journal.pone.0126515.
14. Valvatne P.H., Blunt M.J. Predictive pore-scale modeling of two-phase flow in mixed wet media // *Water Resources Res.* – 2004. – Vol. 40(7). – doi:10.1029/2003WR002627.
15. Jettestuen E., Friis H.A., Helland J.O. A locally conservative multiphase level set method for capillary-controlled displacements in porous media // *Journal of Computational Physics*. – 2021. – Vol. 428). – Art. No. 109965. – doi: 10.1016/j.jcp.2020.109965.
16. Shikhov I., d'Eurydice M.N., Arns J.Y. et al. An experimental and numerical study of relative permeability estimates using spatially resolved t1-z NMR // *Transp. Porous Med.* – 2017. – Vol. 118. – P. 225–250. – doi: 10.1007/s11242-017-0855-7.
17. van Dijke M.I.J., Sorbie K.S. The relation between interfacial tensions and wettability in three-phase systems: consequences for pore occupancy and relative permeability // *J. Pet. Sci. Eng.* – 2002. – Vol. 33(1-3). – P. 39–48.
18. Huang D.D., Honarpour M.M. Capillary end effects in coreflood calculations // *J. Pet. Sci. Eng.* – 2004. – Vol. 19. – P. 103–117.
19. Вершинин А.В., Улькин Д.А., Яковлев М.Я. Вариант численной оценки эффективных механических характеристик ядра с помощью САЕ-системы FIDESYS // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. – Казань : Изд-во Казанск. ун-та. – 2015. – С. 746–748.
20. Levin V.A., Lokhin V.V., Zingerman K.M. Effective elastic properties of porous materials with randomly dispersed pores. Finite deformation // *J. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 67(4). – P. 667–670.
21. Григорьев А.В. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде // *Математические заметки СВФУ*. – 2013. – Т. 20, № 2. – С. 237–245.

22. Ходос О.А. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2010. – № 3. – С. 54–57.
23. Дияшев Р.Н., Коныхов В.М., Михайлов В.В. и др. Численное моделирование фильтрации неьютоновской нефти в трещиновато-пористом пласте с подошвенной водой// Учёные записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – Т. 153, № 4. – С. 84–97.
24. Рассохин С.Г., Троицкий В.М., Мизин А.В. и др. Экспериментальное исследование процессов трехфазной фильтрации в термобарических условиях аптских отложений // Вести газовой науки. – 2010. – № 1(4). – С. 167–178.
25. Орлов Д.М., Рыжов А.Е., Савченко Н.В. и др. Комплексное экспериментальное исследование двухфазного течения в коллекторах Чайнинского нефтегазоконденсатного месторождения и разработка методики количественной оценки влияния условий фильтрации на относительные фазовые проницаемости // Вести газовой науки. – 2012. – № 3(11). – С. 130–145.
26. Ханин А.А. Породы-коллекторы нефти и газа нефтегазоносных провинций СССР. – М. : Недра, 1973. – С. 23–25.
27. Цыдыпов С.Г.Ц. Двухфазная фильтрация в трещиновато-пористой среде // Вестник Бурятского государственного университета. Серия: Математика, информатика. – 2019. – № 2. – С. 104–115.
28. Van Genuchten M.Th. A closed formulation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils // Journal Soil Science Society of America. – 1988. – Vol. 44. – P. 239–259.
29. Taban A., Sadeghi M.M., Rowshanzamir M.A. The estimation of Van Genuchten SWCC model for unsaturated sands by means of the genetic programming // Scientia Iranica. – 2017. – Vol. 25(4). – P. 2026–2038.
30. Gardner W. Mathematics of isothermal water conduction in unsaturated soils // Highway Research Board Special Report. – 1958. – Vol. 40. – P. 78–87.
31. Brooks R.H. Hydraulic properties of porous media // Hydrology Papers. – 1964. – Vol. 24. – P. 37.
32. Fang S., Shen P., Qi X. et al. The distribution of Van Genuchten model parameters on soil-water characteristic curves in Chinese Loess Plateau and new predicting method on unsaturated permeability coefficient of loess // PLoS One. – 2023, Jan. 4. – Vol. 18(1). – e0278307. – doi: 10.1371/journal.pone.0278307.

MATHEMATICAL MODELS OF FLUID FLOW IN A POROUS MEDIUM

Kraynov M. A.

National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk

Lenin Str, 36, 634050

E-mail: mikhailkraynov@mail.ru

Abstract. Modeling of flows in porous media is of great importance in earth sciences. This review considers existing mathematical models of fluid flow in a core, as well as methods for numerical realization of these models. The purpose of

the review is to start establishing a new mathematical model, with respect to the problem of water and oil flow in a core, based on existing ones. Such a model will take into account current research and computational problems in the field of filtration theory, as well as physical and geometric features of that space.

Keywords: Navier–Stokes equation, core, two-phase flow, Young–Laplace equation, capillary pressure, Van Genuchten equation, fractured porous media.

УДК 533.656:662.969+536.46

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ДИОКСИДА АЗОТА В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

О.В. Матвиевко^{1,2}, П.С. Мартынов³

¹Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

²Томский государственный архитектурно-строительный
университет
Россия, г. Томск, пл. Соляная, 2, 634003

³Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН
Россия, г. Томск, пл. Академика Зуева, 1, 634055

E-mail: matvolegv@mail.ru, martypavel@bk.ru

Аннотация. Данная работа посвящена изучению влияния закрученного потока и теплообмена на процесс неравновесной диссоциации диоксида азота. Результаты исследования показали, что с увеличением температуры стенки интенсифицируется протекание химической реакции в потоке. Это приводит к тому, что тепло, поступающее от стенки, поглощается за счет реакции диссоциации в потоке. Было также отмечено, что интенсификация теплообмена, обусловленная закруткой потока, сохраняется на большем расстоянии от входа в трубу при высоких числах Рейнольдса. Таким образом, повышение эффективности использования закрученных потоков связано с увеличением зоны, в которой преобладают центробежные силы.

Ключевые слова: теплообмен, химическое реагирование, диссоциация, пограничный слой, вычислительная гидродинамика.

Введение. Исследование теплообмена при течении в каналах химически реагирующих теплоносителей является в настоящее время одной из важных проблем конвективного теплообмена, получившей развитие в связи с потребностями современной техники, в частности атомной энергетики и химической технологии [1–3].

Реакция диссоциации тетраоксида азота протекает в две стадии: $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$. При нагреве первая стадия протекает быстро и может считаться равновесной. Вторая стадия протекает с конечной скоростью [4–7]. При таких условиях можно рассматривать процессы тепломассопереноса отдельно для каждой стадии.

В представленной работе рассматривается протекание второй стадии химической реакции: $NO_2 \rightleftharpoons NO + O_2$. Целью работы является численное исследование влияния закрутки потока на теплоотдачу

неравновесно диссоциирующего диоксида азота в круглой цилиндрической трубе.

Математическая постановка задачи. Для описания структуры потока используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса [8–11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right], \\ \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r \left(2 \frac{\partial v}{\partial r} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial v r}{\partial r} \right) \right) \right] - 2 \frac{\mu_{\text{eff}} v}{r^2} + \frac{\rho w^2}{r}, \\ \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v w r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_{\text{eff}} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_{\text{eff}} r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right] - \frac{\rho v w}{r}. \end{aligned}$$

Исследования характеристик турбулентности проводились с использованием составной модели Ментера SST (Shear Stress Transport):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v k r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) r \frac{\partial k}{\partial r} \right] \\ &+ F_2 \tilde{G} - C_\mu \rho \omega k, \\ \frac{\partial \rho u \omega}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v \omega r}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \\ &+ \left(\frac{C_\beta}{C_\mu} - \frac{\sigma_\omega}{\sqrt{C_\mu}} \mathcal{X}^2 \right) \frac{\rho}{\mu_t} F_2 \tilde{G} - C_\beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) C_{\text{kw}}. \end{aligned}$$

При моделировании теплопереноса и химического реагирования используются уравнение теплопроводности и диффузии реагента, с учетом протекающей в потоке реакции:

$$\begin{aligned} C_p \left(\frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r T}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda_e r \frac{\partial T}{\partial r} \right] - \mathcal{Q} \Phi, \\ \frac{\partial \rho u C}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r C}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho D_e \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho D_e r \frac{\partial C}{\partial r} \right] - \Phi. \end{aligned}$$

Скорость химической реакции определяется в соответствии с законом Аррениуса. Параметры химической реакции выбирались для реакции диссоциации диоксида азота $NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$. Энергия активации $E_A = 103.8$ кДж/кмоль, $k_0 = 3 \cdot 10^7$ с⁻¹.

Плотность среды ρ определяется уравнением состояния:

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \left(\frac{C}{W_{NO_2}} + \frac{1-C}{W_{NO}} \right)^{-1}.$$

На входе в канал задается распределение скорости потока, температуры и параметров турбулентности:

$$x = 0: u = u_{in}, \quad v = 0, \quad w = u_{in} Ro \left(\frac{r}{R} \right), \quad k = Tu \cdot (u_{in}^2 + w_{in}^2),$$

$$\omega = C_\omega k_{in}^{1/2} / R, \quad T = T_{in}, \quad C = C_{in},$$

где $C_\omega = 5$ – параметр модели. Параметр Россби Ro [3] характеризует величину угловой скорости потока $\dot{\phi} = Ro \cdot u_{in} / R$.

В выходных сечениях граничные условия можно записать в виде:

$$x = L: \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

На оси канала задаются условия симметрии:

$$r = 0: \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r} = 0.$$

На стенках канала выполняются условия прилипания и идеальной теплопроводности, кинетическая энергия турбулентности полагается равной нулю:

$$r = R: u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad k = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{\partial C}{\partial r} = 0.$$

Результаты. В случае прямого течения распределение температуры в приосевой части на начальном участке характеризуется постоянным значением температуры. Вблизи стенки заметна область температурного пограничного слоя. Результаты расчетов показывают, что с увеличением температуры стенки интенсифицируется протекание в потоке химической реакции. В результате этого тепло, подводимое со стенки, поглощается вследствие протекания в потоке реакции диссоциации. Таким образом, температура в основной зоне течения ($r < 0.95R$) при вариации температуры стенки от $T_w = 600$ до 900 К практически не изменяется.

С увеличением интенсивности закрутки интенсифицируется прокачка холодного газа около горячей стенки. Таким образом, на начальном участке течения с увеличением интенсивности закрутки наблюдается понижение температуры в пристеночной области и увеличение температурного градиента на стенке. На участке, где вязкие силы начинают преобладать над центробежными силами, происходит торможение потока у стенки, что приводит к оттоку из периферийной области в приосевую, причем интенсивность оттока увеличивается с закруткой, поэтому распределение температуры в сечении становится более равномерным, среднерасходная температура увеличивается, а тепловой поток от стенки уменьшается. В результате этого радиальное распределение температуры в потоках с закруткой становится более равномерным. Формированию равномерного распределения температуры в закрученном потоке также способствует наличие центральной зоны возвратных течений, образующейся в сильнозакрученном потоке. В эту зону вовлекаются нагретые массы газа из достаточно удаленных от входа сечений, сносятся вверх по потоку, смешиваясь с ещё холодным газом, и, тем самым, способствуют установлению однородного распределения температуры.

Заметим, что обусловленная закруткой интенсификация теплообмена на начальном участке течения сохраняется при высоких значениях числа Рейнольдса на большем расстоянии от входа в трубу.

Нагрев пристеночных слоев приводит к смещению химического равновесия в сторону образования оксида азота. В результате этого концентрация диоксида азота в пристеночной области значительно уменьшается. Происходит формирование концентрационного пограничного слоя (рис. 1). Процесс формирования концентрационного пограничного слоя в химически реагирующем потоке характеризуется теми же особенностями, что и процесс формирования температурного пограничного слоя. Вниз по потоку наблюдается рост толщины концентрационного слоя. При этом по мере термической стабилизации концентрация NO_2 в потоке уменьшается. Закрутка потока, как уже отмечалось, интенсифицирует теплообмен со стенкой. В результате с ростом закрутки температура потока увеличивается не только в пристеночных, но и приосевых областях течения. Как следствие этого, на одном и том же удалении от входного сечения массовая доля в закрученном потоке становится меньше, чем в прямоточном. Отметим, что при сильной закрутке потока интенсивный нагрев теплоносителя рециркулирующим в зоне возвратных течений газом приводит к разложению NO_2 на незначительном удалении от входа в трубу.

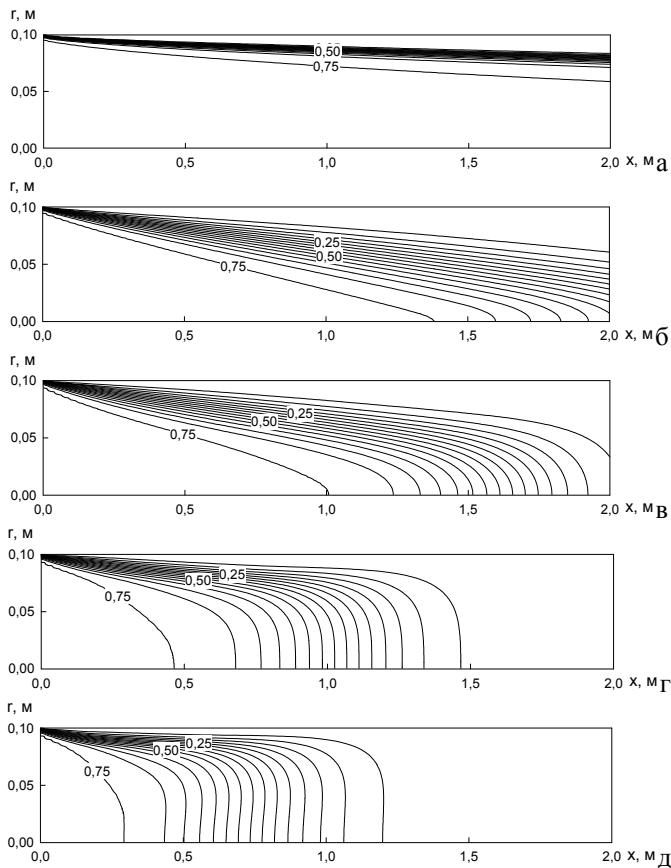


Рис. 1. Изолинии массовой доли NO_2 в потоке $u_{in} = 1$ м/с, $T_{in} = 300$ К, $T_w = 300$ К: а – $Ro = 0$; б – $Ro = 4$; в – $Ro = 8$; г – $Ro = 12$; д – $Ro = 16$

Результаты расчетов показывают, что с увеличением температуры стенки интенсифицируется протекание в потоке химической реакции. В результате этого тепло, подводимое со стенки, поглощается вследствие протекания в потоке реакции диссоциации. Таким образом, температура в основной зоне течения ($r < 0.95R$) при вариации температуры стенки от $T_w = 600$ до 900 К практически не изменяется. Обусловленная закруткой интенсификация теплообмена на начальном участке течения сохраняется при высоких значениях числа Рейнольдса на большем расстоянии от входа в трубу. Поэтому повышение эффектив-

ности использования закрученных потоков связано с увеличением области с преобладанием центробежных сил. Формированию равномерного распределения температуры в закрученном потоке также способствует наличие центральной зоны возвратных течений, образующейся при сильной закрутке.

Список литературы

1. Нестеренко В.Б. Диссоциирующая четырехокись азота перспективный теплоноситель и рабочее тело атомных электростанций с газоохлаждаемыми реакторами на быстрых нейтронах // Теплоэнергетика. – 1972. – № 1. – С. 72–78.
2. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ / под ред. В.Б. Нестеренко. – Минск : Наука и техника, 1976.
3. Матвиенко О.В., Бубенчиков А.М. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования закрученного потока диссоциирующего газа // Инж.-физ. журн. – 2016. – Т. 89, № 1. – С. 118–126.
4. Нестеренко В.Б., Бубнов В.П., Котельских Ю.Г. и др. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ // Диссоциирующие газы как теплоносители и рабочие тела энергетических установок / под ред. В.Б. Нестеренко. – Минск : Наука и техника, 1976. – Ч. 1. – С. 76–85.
5. Петрович В.Ю., Тверковкин Б.Е., Зубцова С.Л. и др. Исследование тепломассопереноса при турбулентном течении химически реагирующей системы $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ в обогреваемой трубе // Диссоциирующие газы как теплоносители и рабочие тела энергетических установок / под ред. В.Б. Нестеренко. – Минск : Наука и техника, 1976. – Ч. 2. – С. 16–32.
6. Дик И.Г., Матвиенко О.В. Теплообмен в закрученном потоке при наличии эндотермической реакции // Тепл. выс. темп. – 1990. – Т.28, № 2. – С. 190–191.
7. Dik I.G., Matviyenko O.V. Heat transfer in chemically reacting swirled flows // Heat Transfer Research. – 1993. – Vol. 25(4). – P. 511–514.
8. Матвиенко О.В. Исследование теплообмена и формирования турбулентности во внутреннем закрученном потоке жидкости при низких числах Рейнольдса // Инж.-физ. журн. – 2014. – Т. 87, № 4. – С. 908–918.
9. Матвиенко О.В., Мартынов П.С. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования в равновесно диссоциирующем газе // Инж.-физ. журн. – 2021. – Т. 94, № 2. – С. 453–465.

10. Матвиенко О.В., Мартынов П.С. Математическое моделирование теплообмена и химического реагирования в равновесно диссоциирующем газе // Инж.-физ. журн. – 2022. – Т. 95, № 2. – С. 435–447.
11. Матвиенко О.В., Мартынов П.С. Влияние закрутки потока равновесно диссоциирующего газа в трубе на теплообмен и химическое реагирование в нем // Инж.-физ. журн. – 2023. – Т. 96, № 3. – С. 766–778.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER OF NITROGEN DIOXIDE IN A SWIRLING FLOW

O.V. Matvienko^{1,2}, P.S. Martynov³

¹Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

²Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Russia, Tomsk, Solyanaya Sq., 2, 634003

³Institute of Atmospheric Optics, Russian Academy of Sciences, V.E. Zuev SB RAS, Russia, Tomsk, Academician Zuev Sq., 1, 634055

E-mail: matvolegv@mail.ru, martypavel@bk.ru

Abstract. This work is devoted to studying the influence of swirling flow and heat exchange on the process of nonequilibrium dissociation of nitrogen dioxide. The results of the study showed that as the wall temperature increases, the chemical reaction in the flow intensifies. This results in the heat coming from the wall being absorbed by the dissociation reaction in the flow. It was also noted that the intensification of heat transfer due to flow swirling persists at a higher distance from the pipe entrance at high Reynolds numbers. Thus, increasing the efficiency of using swirling flows is associated with an increase in the zone in which centrifugal forces predominate.

Keywords: heat transfer, chemical reaction, dissociation, boundary layer, computational fluid dynamics.

УДК 536.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАДИАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ОБРАЗЦЫ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ГОРЮЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Т.И. Медведева, Е.Л. Лобода, Д.П. Касымов

Национальный исследовательский

Томский государственный университет

г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: tatedmedvedeva@yandex.ru, loboda@mail.com,
denkasymov@gmail.com

Аннотация. Современные тенденции в строительстве приводят к более широкому использованию деревянных конструкций. Дерево, как натуральный материал, предлагает много преимуществ с точки зрения использования, но оно так же имеет свойства, которые делают его в использовании в строительстве не совсем идеальным. Среди наиболее проблемных - его восприимчивость к высоким температурам (пожар). В статье рассматривается вопрос противопожарной защиты древесины. Кроме того, в исследовании протестированы три огнезащитных состава: «ФЕНИЛАКС», «ФУКАМ» и «ЗОТЕКС Биопирол».

Ключевые слова: горение, строительные материалы, пожары, антипирены, огнестойкость.

Введение. Древесина является ценным строительным материалом, который может широко использоваться в общественных зданиях, поскольку обладает уникальными свойствами. Повышение огнестойкости древесины становится одной из важных задач. Процесс воспламенения характеризуется временем воспламенения образца, которое зависит от температуры воспламенения, термических свойств материалов, состояния образца (размера, влажности, ориентации) и критического теплового потока [1]. Определение «температура воспламенения» можно интерпретировать как минимальную температуру, до которой необходимо нагреть воздух, чтобы образец, помещенный в нагретую воздушную среду, загорелся, или температуру поверхности образца непосредственно перед точкой воспламенения. Чтобы снизить воспламеняемость и/или пожароопасность, древесину обрабатывают антипиренами. Такая обработка значительно снижает скорость распространения пламени по поверхности древесины и уменьшает количество потенциального тепла [2].

Экспериментальная часть. Эксперименты проводились на лабораторной установке, которая изображена на рисунке 1.

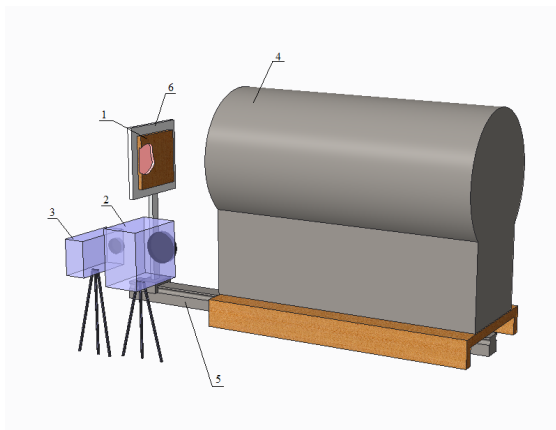


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – образец; 2 – инфракрасная камера JADE J530SB; 3 – видеокамера; 4 – модель абсолютно черного тела; 5 – оптический рельс; 6 – каретка с подставкой

В качестве измерительного оборудования в эксперименте использовались: инфракрасная камера научно-исследовательского класса JADEJ530SB для измерения поля температуры на поверхности образцов древесных строительных материалов с рабочей длиной волны 2.5–2.7 мкм; видеокамера для контроля поведения материалов в течение экспериментов, а также оценки времен задержки зажигания; излучатель АЧТ45/100/1100 Омского завода ОАО НПП «Эталон» с диапазоном изменения температуры от 100–1100 °С [3].

В работе использовались древесные строительные материалы, которые наиболее часто встречаются в строительстве и распространенные на рынке — фанера, древесно-стружечная плита (ДСП), ориентированно-стружечная плита (ОСП).

Материалы в работе, покрывались поверхностной огнезащитной пропиткой. Процедура поверхностной пропитки заключается в нанесении на поверхность древесины и изделий из дерева водным раствором огнезащитных солей (антипиренов).

Метод поверхностной пропитки применяется в основном для огнезащиты готовых деревянных конструкций, которые эксплуатируются в условиях, исключающих попадание влаги на защищаемые поверхности. Перед экспериментом строительные материалы были обработаны огне-биозащитными пропитками для древесины «ФЕНИ-ЛАКС», «ФУКАМ» и «ЗОТЕКС Биопирол». Эксперимент проводился следующим образом: на оптический рельс устанавливалась подвижная каретка с фиксатором на которую была закреплена подставка с образ-

цом (рис. 1). После этого каретка с образцом устанавливали напротив АЧТ с определенным расстоянием 2,3 мм для плотности теплового потока $q = 38 \text{ кВт/м}^2$. Заранее, с помощью электронного блока управления задавалась температура 1100°C для АЧТ. Все эксперименты фиксировались на инфракрасную камеру [4].

Результаты. По результатам проведения эксперимента были получены данные по изменению во времени средней температуры по поверхности образца при тепловом воздействии заданной интенсивности для рассмотренных образцов в отсутствии и при наличии поверхностной огнезащиты. Результаты представлены на рисунках 2–4.

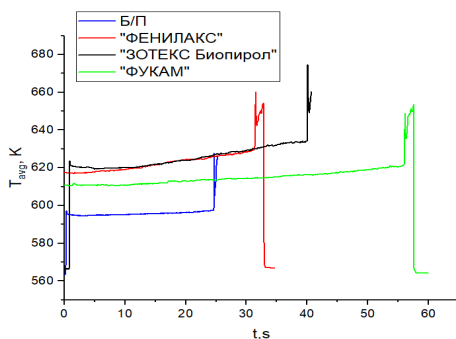


Рис. 2. График изменения во времени средней температуры по поверхности ДСП

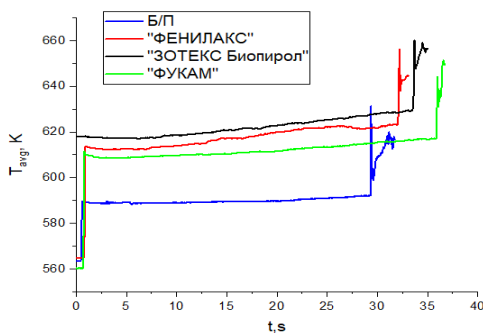


Рис. 3. График изменения во времени средней температуры по поверхности ОСП

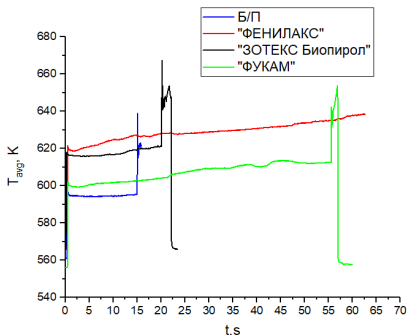


Рис. 4. График изменения во времени средней температуры по поверхности фанеры

Проанализировав полученные данные, следует отметить, что почти сразу происходило воспламенение образцов (время задержки зажигания не превышало 55,8 с). На графиках хорошо идентифицируется момент вспышки и температур поверхности образца.

Заключение. После сравнительного анализа можно заметить, что все материалы воспламенялись быстрее без пропитки. Так же следует отметить, что самая низкая температура зажигания наблюдалась у образцов, обработанных пропиткой «ФУКАМ» (612,7-621,3 К), но при этом время задержки зажигания было наибольшим (34,8-55,8 с). Самая высокая температура вспышки составила у материалов в пропитке «ЗОТЕКС Биопирол» - 634,5 К. Отдельно следует отметить, что за время эксперимента не произошло воспламенения ни в одном опыте с образцами фанеры, обработанными пропиткой «ФЕНИЛАКС».

Можно отметить, что разная температура вспышек образцов в пропитках происходило из-за разной пористости и плотности материалов, так как от этого зависит, насколько глубоко проникает пропитка и в дальнейшем защищает от возгорания. Размеры всех образцов у нас были одинаковые и составляли 100x100 мм, толщина их варьировалась от 18-21 мм в зависимости от типа материала. Плотность у ориентированно-стружечной плиты составляет примерно 570 кг/м^3 , у древесно-стружечной плиты 590 кг/м^3 , у фанеры 650 кг/м^3 .

Также во время эксперимента влагосодержание образцов составило: ОСП – 4,94 %, ДСП – 4,84 %, фанера – 3,25 %.

Список литературы

1. Rantuch P., Kacikova D., Martinka J. et al. The influence of heat flux density on the thermal decomposition of OSB // Acta Facultatis Xylogologiae Zvolens Publica Slovaca. – 2015. – Vol. 57. – P. 125–134.
2. Njankouo J.M., Dotreppe J.C., Franssen J.M. Experimental study of the charring rate of tropical hardwoods // Fire and Materials. – 2004. – Vol. 28. – P. 15–24.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2018660031 «Tempfild-v.1. Построение и анализ поля температуры по данным, полученным при помощи инфракрасной камеры JADEJ530SB» / авторы: Агафонцев М.В., Касымов Д.П., Рейно В.В., Лобода Е.Л. Зарегистрирована 28.08.2018 г.
4. Медведева Т.И., Агафонцев М.В., Касымов Д.П. Исследование влияния типа огнезащиты и способа ее нанесения на пожарную опасность древесины // Сопряженные задачи механики реагирующих сред, информатики и экологии : материалы XXII Всероссийской научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Томск, 2021. – С. 77–79

STUDY OF THE INFLUENCE OF RADIATION EXPOSURE ON SAMPLES OF SOME TYPES OF COMBUSTIBLE MATERIALS

T.I. Medvedeva, E.L. Loboda, D.P. Kasymov

National Research Tomsk State University, Tomsk, Lenina str., 36, 634050

E-mail: tatemedvedeva@yandex.ru, loboda@mail.com, denkasymov@gmail.com

Abstract. Modern trends in construction lead to increased use of wooden structures. Wood, as a natural material, offers many advantages in terms of use, but it also has properties that make it less than ideal for use in construction. Among the most problematic is its susceptibility to high temperatures (fire). The article discusses the issue of fire protection of wood. In addition, the study tested three fire retardant compounds: PHENYLAX, FUKAM and ZOTEX Biopyrol.

Keywords: combustion, building materials, fires, fire retardants, fire resistance.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СТАЛЬНОМ БАРАБАНЕ

В.Д. Руссо, Е.И. Гурина

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: rviktoria2000@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования температурных характеристик стального барабана котельной установки с помощью метода конечных разностей и метода контрольных объемов.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, имитационное моделирование, метод конечных разностей, ANSYS Fluent, стальной барабан, котельная установка.

Введение. Исследования процессов теплообмена в настоящее время для таких направлений как химическая технология, металлургия, строительное дело, нефтедобыча и нефтепереработка, машиностроение – в значительной степени базируются на численном и компьютерном моделировании. Это стало возможным благодаря существенному прогрессу в развитии вычислительных методов решения задач для уравнений в частных производных и увеличению мощности современных вычислительных машин.

Котельной установкой называют совокупность устройств и механизмов, предназначенных для производства водяного пара или горячей воды [1]. Водяной пар используют для привода в движение паровых двигателей, для производственных нужд промышленности и сельского хозяйства и отопления помещений. Горячую воду используют для отопления производственных, общественных и жилых зданий, а также для коммунально-бытовых нужд населения.

Физическая постановка задачи. В данной работе основное внимание уделено процессам теплопередачи теплопроводностью в барабане парового котла котельной установки (рис.1).

Паровой котел производит пар под высоким давлением (выше атмосферного) при сжигании в топке топлива. Обычно пар используется в технологических целях, для различного рода нужд промышленных предприятий. *Барабан парового котла* представляет собой цилиндрический корпус с различной толщиной стенки, с обоих концов которого имеются доньшки выпуклой формы с установленными в них ла-

зами. Одно из основных назначений барабана состоит в разделении пароводяной смеси на пар и воду с отдельным их выводом по трубам к пароперегревателю [1].

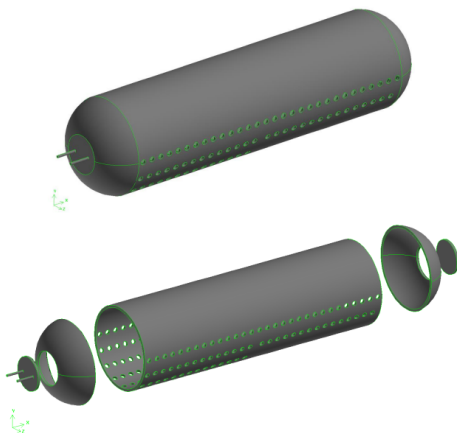


Рис. 1. Геометрия стального барабана, построенная в Gambit

Численное моделирование распространения тепла в конструкции стального барабана проводится с помощью метода конечных разностей на основе явной и неявной разностных схем [2] в двумерной постановке. Начальная температура T_0 барабана равна $30\text{ }^{\circ}\text{C}$. После заполнения объекта горячей водой температура внутренних стенок его становится равной $T_l = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Геометрические параметры цилиндрической обечайки барабана: внешний диаметр $D_{out} = 3,7\text{ м}$; внутренний диаметр $D_{in} = 3,5\text{ м}$, глубина наполняемой полости барабана $H = 15\text{ м}$. Рассмотрим процесс прогрева боковой стенки стального барабана и ограничимся следующими размерами расчетного домена: 2D горизонтальное сечение размером $100\text{ мм} * 100\text{ мм}$ (рис. 2).

В начальный момент времени температура расчетной области $T_0 = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Температура на левой границе $T_l = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Правая граница пластины, а также две горизонтальные являются адиабатическими. Проанализируем процесс передачи тепла теплопроводностью в пластине и оценим значение температуры стенки на глубине 50 мм через время $t = 60\text{ секунд}$ от начала процесса нагрева (рис. 3).

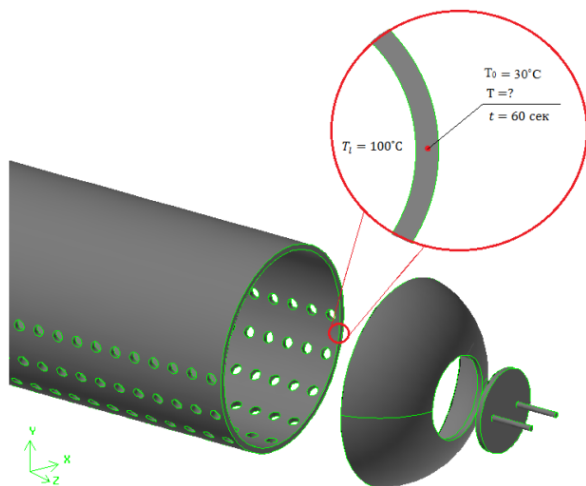


Рис. 2. Область интереса математического моделирования

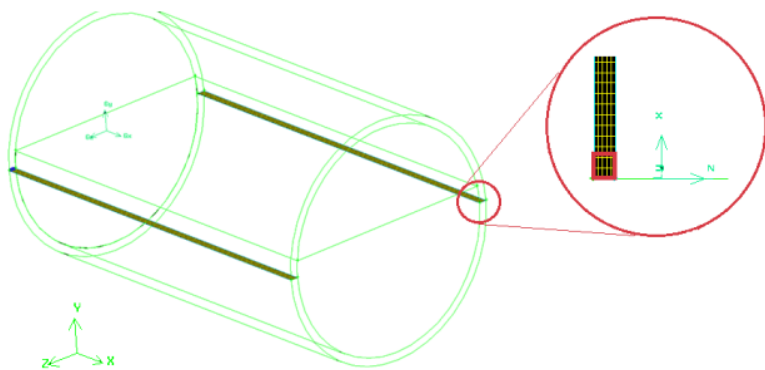


Рис. 3. Геометрическая постановка задачи (красным – 2D горизонтальное сечение 100 мм * 100 мм)

Математическая постановка задачи. С помощью математического и численного моделирования необходимо определить значение температуры в каждой точке рассматриваемой конструкции стального барабана с течением времени. В рассматриваемой математической мо-

дели определения температурного поля в двумерном сечении барабана предполагается, что теплофизические характеристики не зависят от температуры и $\lambda = const, \rho = const, C_p = const$. В работе рассматривается процесс распространения тепла в однородной стальной пластине. Дифференциальное уравнение теплопроводности для двумерной нестационарной задачи (в декартовых координатах) без внутренних источников теплоты и постоянным значением физических параметров имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), 0 < x < L, 0 < y < H \quad (1)$$

где $T(t, x, y)$ – температура ($^{\circ}\text{C}$); ρ – плотность материала (кг/м^3), C_p – удельная теплоемкость ($\text{Дж/кг} \cdot ^{\circ}\text{C}$), λ – коэффициент теплопроводности ($\text{Вт/м} \cdot ^{\circ}\text{C}$).

В начальный момент времени температура конструкции равна:

$$T(t, x, y)|_{t=0} = 30^{\circ}\text{C}, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H \quad (2)$$

На левой границе рассматривается граничное условие I рода:

$$T(t, x, y)|_{x=0} = 100^{\circ}\text{C}, t > 0 \quad (3)$$

На правой границе рассматривается граничное условие II рода:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(t, x, y)|_{x=L} = 0, t > 0 \quad (4)$$

Две горизонтальные границы также являются адиабатическими (ГУ II рода):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y}(t, x, y)|_{y=0} &= 0, t > 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(t, x, y)|_{y=H} &= 0, t > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (1) с начальными краевыми условиями (2) – (5) составляют полную математическую формулировку рассматриваемой задачи теплопроводности.

Результаты численного моделирования и верификация.

Численное решение поставленной задачи реализовано на C^{++} на основе метода конечных разностей с использованием явной и неявной разностных схем в двумерной постановке.

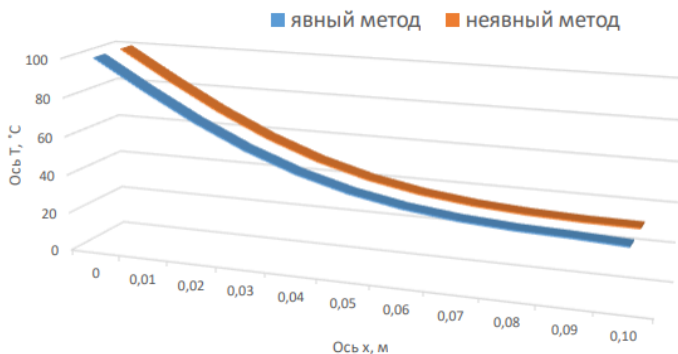


Рис. 4. Распределение температуры по толщине пластины для двумерного случая (спустя 60 секунд). Материал пластины – углеродистая сталь

Результаты расчетов приведены для расчетной сетки 100×100 узлов при $L = 0.1$ м, $H = 0.1$ м, $\lambda = 40$ Вт/(м·°C), $\rho = 7800$ кг/м³, $c = 460$ Дж/(кг·°C), $T = 30$ °C ($t = 0$). На рисунке 4 представлено распределение температуры по толщине пластины спустя 60 секунд от начала процесса прогрева для случая двумерной постановки задачи (материал пластины – углеродистая сталь).

Верификация полученных численных результатов проводилась с данными, полученными в результате компьютерного моделирования процесса теплопередачи в конструкции барабана котельной установки в пакете гидродинамики ANSYS Fluent [3] в трехмерной постановке. Поскольку построение структурированной расчетной сетки нижней части барабана не представляется возможным из-за наличия отверстий для забора воды, исходная 3D модель барабана была разбита на две части. Расчетная сетка состояла из 2 645 561 элемента, из которых 1 883 000 гексагональных элементов высокого качества относятся к верхней части барабана и 762 000 ячеек в форме тетраэдра – к нижней части барабана (рис. 5).

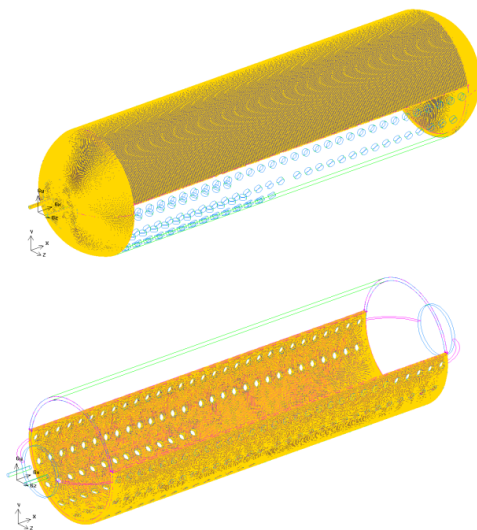


Рис. 5. Расчетный домен, покрытый сеткой, построенной в Gambit

В таблице ниже представлены результаты численного расчета при $h_x = h_y = 0,002$ м, с использованием программных реализаций на C++ (явная, неявная схемы), а также результаты, полученные в пакете вычислительной гидродинамики Ansys Fluent. Полученные значения температуры сравниваются с данными из методического пособия [4], наблюдается хорошее согласование полученных результатов, что свидетельствует о корректном проведении численного и компьютерного моделирования протекающего физического процесса.

| $T_1, ^\circ\text{C}$ из [1] | $T_2, ^\circ\text{C}$ явная схема | $T_3, ^\circ\text{C}$ неявная схема | $T_F, ^\circ\text{C}$ расчет в Ansys Fluent | $T_{3D}, ^\circ\text{C}$ | Относительная погрешность $\Delta, \%$ | | | |
|---------------------------------|---|---|---|--------------------------|---|---------|-----------------|-----------|
| | | | | | явная | неявная | Ansys Fluent | 3D модель |
| 41,917 | 41,881 | 42,021 | 42,031 | 42,223 | 0,08% | 0,24% | 0,27% | 0,72% |

3. Старченко А.В., Беликов Д.А., Гольдин В.Д. и др. FLUENT (виртуальный лабораторный практикум) [Электронный ресурс]. – URL: <https://old.math.tsu.ru/EEResources/fluent/index.html>.
4. Старченко А.В., Иванова И.А., Лебедев Б.В. и др. Численное моделирование нестационарных задач теории теплопроводности с использованием метода конечных разностей. – Томск : Изд-во ТПУ, 2002. – 18 с.

NUMERICAL STUDY OF HEAT PROPAGATION IN A STEEL DRUM

V.D. Russo, E.I. Gurina

National Research Tomsk State University

Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: rviktoria2000@gmail.com

Abstract. In this paper, the actual problem of modeling the temperature characteristics of a steel drum of a boiler plant using the finite difference method and the control volume method is considered.

Keywords: thermal conductivity equation, simulation modeling, finite difference method, ANSYS Fluent, steel drum, boiler plant.

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ LES В МОДЕЛИ WRF

А.И. Сваровский, А.В. Старченко

Национальный исследовательский

Томский государственный университет

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050

E-mail: svarart@yandex.ru, starch@math.tsu.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается применение метода вихре-реразрешающего моделирования (LES) с помощью известной модели Weather Research & Forecasting (WRF) для условий полевого эксперимента BLLAST, проведенного в 2011 году на территории юга Франции.

Ключевые слова: турбулентность, WRF, LES, проверка.

Введение. Моделирование движения воздуха в атмосферном пограничном слое лежит в основе научно-исследовательской и оперативной прогнозной деятельности в авиации, лесном хозяйстве, а также при оценке качества атмосферного воздуха и возобновляемых источников энергии (ветровая энергетика). В последнее десятилетие достижения в области вычислительной математики, мощности суперкомпьютеров и новых возможностей моделирования побудили несколько научных групп провести эксперименты с моделированием атмосферного пограничного слоя с более высоким пространственным разрешением (горизонтальный шаг сетки менее 1 км). Хотя такое разрешение модели потенциально может повысить качество численного моделирования, оно также усложнит задачу моделирования турбулентности и приведет к неточным результатам, особенно при выборе сетки с горизонтальным разрешением между мезомасштабом и микромасштабом. Такое сеточное покрытие области моделирования часто называется «серая зона». При таких разрешениях модель подсеточного масштаба находится между полностью параметризованным режимом, где применим мезомасштабный подход, основанный на горизонтальной однородности по всей площади ячейки сетки, и режимом моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation), где малые изотропные вихри параметризуются в соответствии с теорией Колмогорова [1].

В данной работе применяется модель Weather Research & Forecasting (WRF), которая является одной из наиболее универсальных и современных систем моделирования атмосферы. Являясь свободно распространяемым программным продуктом, она широко и успешно используется для метеорологического прогнозирования в научных

центрах и метеослужбах различных стран и продолжает непрерывно развиваться [2].

Целью данной работы является повторение расчетов вложенного моделирования крупных вихрей (LES), выполненных для условий полевого эксперимента BLLAST, проведенного в 2011 году на территории юга Франции [3], с помощью современной модели WRF версии 4.2 для того, чтобы ознакомиться с методом моделирования LES, реализованным в данной модели.

Постановка задачи. В модели WRF турбулентные напряжения и потоки обычно моделируются с помощью одномерных параметризаций планетарного пограничного слоя (PBL), которые предполагают горизонтальную однородность, что можно сделать, если горизонтальный размер сетки относительно вертикального велик (например, если горизонтальный размер составляет от нескольких километров до десятков километров). При таком подходе уравнения поля течения решаются с помощью метода Навье–Стокса, осредненного по Рейнольдсу (RANS), где турбулентные движения полностью параметризованы. Однако при уменьшении горизонтального размера сетки до нескольких километров или десятков или сотен метров предположение о горизонтальной однородности становится неверным и необходимо учитывать влияние горизонтальных градиентов турбулентных напряжений и потоков. В таком случае турбулентность явно описывается с помощью LES-подхода, при котором крупные вихри разрешаются численно на сетке, а мелкие моделируются в подсеточной схеме. Система WRF-LES позволяет моделировать поле течения в широком диапазоне масштабных процессов, от мезомасштаба до микромасштаба, имея возможность разрешать средние величины, турбулентные напряжения и потоки [3].

В работе [3] представлен реальный случай долгосрочного вложенного моделирования крупных вихрей (LES) продолжительностью 25 дней, который был выполнен с использованием системы моделирования WRF-LES версии 3.6.1 с максимальным горизонтальным разрешением сетки 111 м, чтобы исследовать способность модели воспроизводить величины турбулентности в первых десятках метров пограничного слоя. Результаты моделирования сравнивались с набором данных наблюдений, полученных во время полевой экспериментальной кампании BLLAST, которая проводилась в начале лета 2011 года на территории юга Франции.

Полигон BLLAST расположен на плато Ланнемезан, к северу от центральных французских предгорий Пиренеев. Местность здесь относительно ровная, но на нее оказывают влияние сложные особенно-

сти рельефа, горы и долины в окрестностях. В частности, участок находится примерно в 11 км к северу от основания первого хребта горного массива Пиренеев с вершинами от 1500 до 2000 м над уровнем моря и примерно в 40 км от самых высоких вершин горного массива, превышающих 3000 м над уровнем моря.

60-метровая башня Valimev Tower была установлена на поверхностном участке, определенном в рамках кампании BLLAST в точке 43.1242 с. ш., 0.3625 в. д. Датчики на башне Valimev Tower были расположены на высоте 29,4 м, 45,8 м и 61,4 м (далее z30, z45 и z60, соответственно) и оснащены трехмерными звуковыми анемометрами (табл. 1), которые способны измерять три компоненты ветра, u , v и w , а также температуру на частоте 10 Гц. Набор данных для этой башни начинается 14 июня 2011 года для уровней z30 и z45 и немного позже для уровня z60, между 10:00 и 11:00 UTC 15 июня 2011 года, и заканчивается 8 июля 2011 года для всех трех уровней. Использовались рассчитанные стандартные отклонения трех компонент ветра и усредненный тепловой поток с временным усреднением 5 мин.

Таблица 1.

Уровни башни, датчики и период данных

| Название уровня | Высота (м) | Датчики | Период данных |
|-----------------|------------|---|-------------------------------|
| z30 | 29,4 | Звуковой анемометр Campbell Csat3 3D | 14 июня 2011 – 8 июля 2011 |
| z45 | 45,8 | Звуковой анемометр Gill master pro 3D, флюгер | |
| z60 | 61,4 | Звуковой анемометр Campbell Csat3 3D | 15 июня 2011 – 8 июля 2011 |

Таким образом, измерения звукового анемометра, полученные с башни Valimev Tower во время кампании BLLAST, позволяют оценить результаты моделирование в течение 25 дней (24 дня для z60).

В данной работе повторное моделирование проводится для даты 01.07.2011 с помощью модели WRF версии 4.2 в соответствии с конфигурацией, ранее разработанной и протестированной на 85 площадках по всему миру. Сконфигурированы четыре вложенных области с центром в точке 43.1242 с.ш., 0.3625 в.д. Внешняя и внутренняя облас-

ти имеют горизонтальное разрешение 9 км (D1) и 333 м (D4), соответственно.

Соотношение между областями составляет 1:3. Моделирование разделено на две части. Во-первых, мезомасштабное моделирование от 9 до 1 км. В этой части используется так называемый «мезомасштабный режим» (MESO), что означает применение наиболее часто используемых уравнений Навье-Стокса, усредненных по Рейнольдсу (RANS). Во-вторых, микромасштабный прогон от 1 км до 333 м с использованием мезомасштабных результатов в качестве начальных и боковых граничных условий (LBC). Эти моделирования выполняются в «микромасштабном режиме» с использованием подхода LES вместо схемы PBL (табл. 2). В MESO-областях применяются модель турбулентности Меллора-Ямады-Джанича и двумерное замыкание Смагоринского для горизонтальной диффузии. Для LES-областей в качестве подсеточной схемы используется трехмерное LES-замыкание турбулентности, включающее прогностическое уравнение для турбулентной кинетической энергии (ТКЕ). Одной из проблем мезомикромасштабного взаимодействия является нетурбулентное состояние LBC. Для решения этой проблемы применяется метод потенциала возмущения LBC. Верх расчетной области модели установлен на уровне 50 гПа, а для предотвращения отражения волн включен демпфирующий слой толщиной 5 км. Во всех областях используется фиксированное число вертикальных уровней (38), первый из которых расположен на высоте около 8 м над уровнем земли, а 15 уровней включены в первые 1000 м атмосферы.

Таблица 2.

Настройка модели WRF. Количество точек сетки по x , y и z отмечено n_x , n_y , n_z

| Область | $n_x \times n_y \times n_z$, | Сетка | Режим | PBL схема |
|---------|-------------------------------|-------|-------|-----------|
| D1 | 99 x 99 x 38 | 9 км | RANS | MYJ |
| D2 | | 3 км | RANS | MYJ |
| D3 | | 1 км | RANS | MYJ |
| D4 | | 333 м | LES | - |

Используемый пакет физических параметризаций WRF включает модель быстрого радиационного переноса (RRTM) для длинноволнового излучения, параметризацию Dudhia для коротковолнового излучения и параметризацию поверхности земли Noah. Области D1, D2 и D3 используют пересмотренную параметризацию поверхностного слоя

MM5 и модель Mellor–Yamada–Janjić (MYJ) для параметризации пограничного слоя, широко используемую локальную схему, которая имеет прогностическое уравнение для ТКЕ. Кучевые облака в этих областях не параметризованы. В области D4 используется параметризация микрофизики по схеме WRF Single-Moment 3 класса и теория подобия Монина–Обухова для параметризации приземного слоя.

Моделируемый период длится 2 суток, с 30 июня 2011 г 00 часов по 2 июля 2011 г 00 часов., когда проходила кампания BLLAST. На основе данных Национального центра прогнозирования окружающей среды NCEP FNL Operational Model Global Tropospheric Analyses (ds083.2) были получены начальные и граничные метеорологические характеристики и геодезические параметры на расчетной сетке, покрывающей область исследования. В данном исследовании рассматриваются мезомасштабные и микромасштабные результаты расчетов, полученные на сетках с горизонтальным шагом 1 км и 333 м. Мезомасштабные и микромасштабные выходы имеют различную постобработку. В первом случае выходной сигнал WRF устанавливается на 1 ч. В микромасштабном случае выходные данные сохраняются каждую минуту.

Результаты. Для ознакомления с методом LES, реализованным в модели WRF, численное моделирование было выполнено для даты 01.07.2011 UTC. На рисунках 1–3 ниже приведены графики расчетов (сплошные линии) и наблюдений (кружки) приземной температуры, скорости и направления ветра.

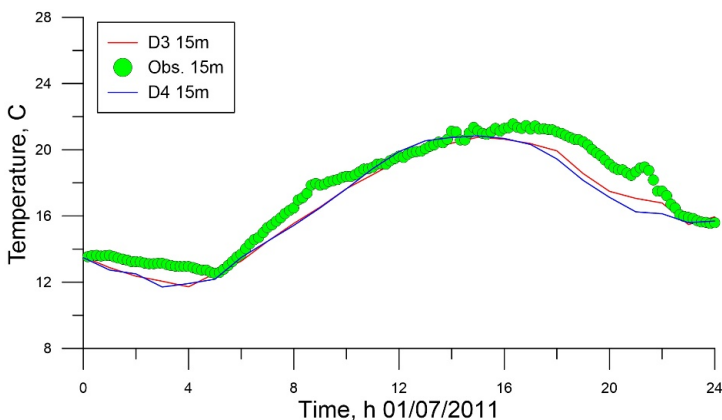


Рис. 1. Графики расчетов (для областей D3 и D4) и наблюдений приземной температуры на высоте 15 м для даты 01.07.2011 UTC

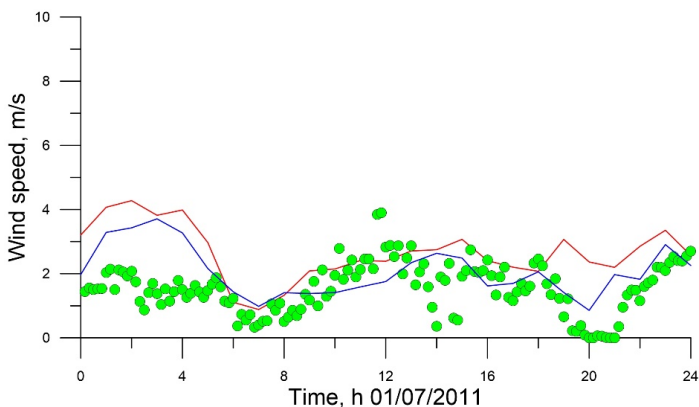


Рис. 2. Графики расчетов (для областей D3 и D4) и наблюдений скорости ветра на высоте 15 м для даты 01.07.2011 UTC

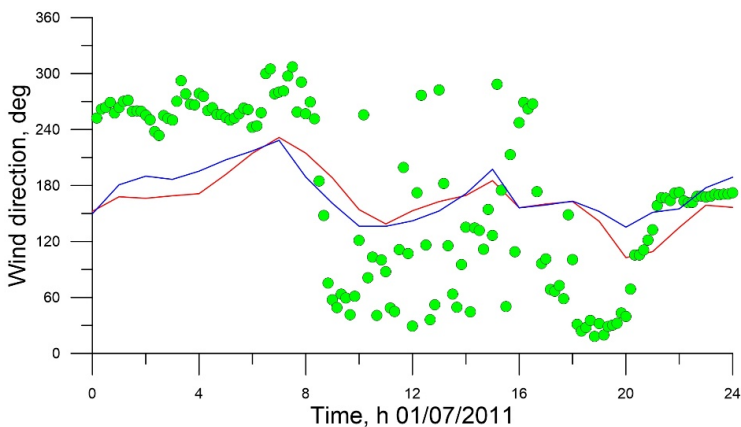


Рис. 3. Графики расчетов (для областей D3 и D4) и наблюдений направления ветра на высоте 15 м для даты 01.07.2011 UTC

Из рисунка 1 видно, что мезомасштабный D3 и микромасштабный D4 (с применением LES) расчеты дают удовлетворительные результаты по приземной температуре в промежутке от 5 до 7 ч, и от 10 до 16 ч и от 22 до 24 ч.

Из рисунка 2 видно, что мезомасштабный расчет D3 дает удовлетворительные результаты по скорости ветра в промежутке от 6 до

18, а микромасштабный расчет D4 (с применением LES) в промежутке от 6 до 19 ч и от 22 до 24 ч.

Из рисунка 3 видно, что мезомасштабный расчет D3 дает удовлетворительные результаты по направлению ветра в промежутке от 21 до 22 ч, а микромасштабный расчет D4 (с применением LES) в промежутке от 21 до 24 ч.

Заключение. В данной работе были выполнены расчеты вложенного моделирования крупных вихрей (LES) для условий полевого эксперимента BLLAST, проведенного в 2011 году на территории юга Франции, с помощью современной модели WRF версии 4.2 для ознакомления с данным методом моделирования. Лучшие результаты микромасштабного моделирования (LES) получены для скорости ветра на высоте 10 м.

Список литературы

1. Doubrava P., Muñoz-Esparza D. Simulating Real Atmospheric Boundary Layers at Gray-Zone Resolutions: How Do Currently Available Turbulence Parameterizations Perform? // *Atmosphere*. – 2020. – Т. 11., № 345.
2. Weather Research & Forecasting Model [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mmm.ucar.edu/models/wrf>. (дата обращения: 15.05.2024)
3. Udina M., Montornès À., Casso P., Kosović B., Bech J. WRF-LES Simulation of the Boundary Layer Turbulent Processes during the BLLAST Campaign // *Atmosphere*. – 2020. – Т. 11, № 1149.

STUDY OF THE POSSIBILITY OF APPLYING LES TECHNOLOGY IN THE WRF MODEL

A.I. Svarovsky, A.V. Starchenko

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: svarart@yandex.ru, starch@math.tsu.ru

Abstract. This paper discusses the application of the large eddy simulation (LES) method using the well-known Weather Research & Forecasting (WRF) model for the conditions of the BLLAST field experiment conducted in 2011 in the south of France.

Keywords: turbulence, WRF, LES, verification.

УДК 519.2

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА УСПЕВАЕМОСТЬ СТУДЕНТОВ ММФ

О.Ю. Серова, Т.В. Емельянова

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: oserova333@mail.ru

Аннотация. В работе были обработаны данные студентов третьего курса ММФ ТГУ. В процессе обучения были выявлены факторы, значимо влияющие на возникновение задолженностей. С помощью критерия хи-квадрат были выявлены факторы, влияющие на успеваемость. Помимо этого, был применён алгоритм случайного леса для построения модели и дальнейшего прогноза. Знание факторов, значимо влияющие на успеваемость, даёт возможность их устранить, и тем самым предотвратить появление задолженностей.

Ключевые слова: успеваемость, поиск зависимостей, критерий хи-квадрат, алгоритм случайного леса.

Введение. Нередко в процессе обучения появляются академические задолженности, и в связи с этим возникает вопрос, что и как влияет на их наличие. Чтобы изучить данную проблему необходимо сначала обнаружить возможные признаки, влияющие на наличие задолженностей и выявить зависимости. После необходимо построить модель с использованием статистических методов и методов машинного обучения, в нашем случае – алгоритмом случайного леса.

Первичная обработка данных. Были обработаны данные студентов третьего курса ММФ за период зимней сессии 2023–2024 г., и выявлено несколько факторов, значимо влияющих на возникновение задолженностей, а именно посещаемость, место проживания (общежитие или квартира), а также размер родного города. Крупным считался город с населением больше 250000 человек. Посещаемость была посчитана в процентном соотношении от количества пропущенных занятий. Все данные были занесены в таблицу, а имена были зашифрованы в целях конфиденциальности.

Таблица 1.

Фрагмент таблицы с набором данных

| Имя | Посещаемость | Общежитие | Долги | Город |
|------|--------------|-----------|-------|-------|
| 1;26 | 0.08 | 1 | 0 | 1 |
| 1;5 | 0.30 | 1 | 1 | 0 |
| 1;9 | 0.12 | 0 | 0 | 1 |

Поиск зависимостей. Для поиска связей между факторами был использован критерий независимости хи-квадрат [1]. Статистика критерия имеет вид:

$$\chi_{\text{выб}}^2 = n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{v_{ij}^2}{v_{.j}v_{i.}} - 1 \right) \sim \chi_{(n-1)(m-1)}^2$$

Здесь v_{ij} – наблюдаемые значения, n – число значений факторного признака (строк), m – число значений результативного признака (столбцов).

Если выборочное значение больше табличного, то гипотеза независимости отвергается.

Для каждого фактора была построена таблица сопряжённости и посчитан критерий хи-квадрат.

Таблица 2.

Таблица сопряжённости условия проживания и наличия долгов

| Условия проживания/долги | Есть | Нет |
|--------------------------|------|-----|
| Общежитие | 12 | 7 |
| Квартира | 2 | 6 |

При расчёте статистики критерия $\chi_{\text{кр}}^2 = 2,71 < \chi_{\text{выб}}^2 = 3,28$. Хи-квадрат выборочное при стандартном уровне ошибки первого рода 0,05 равен $\chi_{\text{кр}}^2 = 3,84$, то есть значение статистики критерия попало практически на границу критической области, поэтому уровень ошибки первого рода был взят 0,1.

Таблица 3

Таблица сопряжённости города и наличия долгов

| Город/долги | Есть | Нет |
|-------------|------|-----|
| Крупный | 11 | 10 |
| Маленький | 3 | 3 |

$\chi_{\text{кр}}^2 = 3,84 > \chi_{\text{выб}}^2 = 0,01$. Из-за того, что данные получились практически идентичными, зависимости не было обнаружено.

Таблица 4

Таблица сопряжённости наличия долгов и пропусков

| Долги/пропуски | 0-20% | 20-40% | 40%< |
|----------------|-------|--------|------|
| Есть | 2 | 7 | 5 |
| Нет | 8 | 5 | 0 |

$\chi_{кр}^2 = 5,99 < \chi_{выб}^2 = 8,9$. Для последнего фактора – посещаемости количество пропущенных занятий, выраженных в процентах, было разбито на три интервала и по результатам критерия зависимость присутствует при уровне ошибки первого рода 0,05.

Построение модели. Для обработки данных был выбран язык программирования Python, а в качестве метода машинного обучения алгоритм случайного леса, так как он может использовать одновременно числовые и категориальные данные, а также существует оценка значимости параметров [2, 3].

Предварительно все данные разбиваются на два набора: обучающий и тестовый. На первом мы обучаем модель, на втором наборе производится расчёт точности полученных результатов. Наиболее распространённое соотношение 70% на 30%.

Случайный лес – это набор деревьев решений, где каждое дерево немного отличается от остальных. Деревом решений называется дерево, с каждой вершиной t которого связаны:

1. Подмножество $X_t \subset X$; с корневой вершиной связывается все пространство возможных значений признаков X ;
2. Подвыборка D_t обучающей выборки D , такая, что $D_t = \{(x, y) \in D : x \in X_t\}$;
3. Некоторая функция (правило) $f_t: X \rightarrow \{0, 1, \dots, k_t - 1\}$ (здесь $k_t \geq 2$ – количество потомков вершины t), определяющая разбиение множества X на k непересекающихся подмножеств.

Алгоритм случайного леса может быть представлен в виде:

1. Для $i = 1, 2, \dots, B$ (здесь B – количество деревьев)
 - Сформировать выборку S размера l по исходной обучающей выборке $D = \{x_i, y_i\}_{i=1}^l$
 - По выборке S индуцировать не усечённое дерево решений T_i с минимальным количеством наблюдений в листах равным n_{min} , рекурсивно следуя следующему подалгоритму:
 - 1.1 из исходных n признаков случайно выбрать p признаков;
 - 1.2 из p признаков выбрать признак, который обеспечивает наилучшее расщепление – правило разбиения множества X ;
 - 1.3 расщепить выборку, соответствующую обрабатываемой вершине, на две подвыборки;
2. В результате выполнения шага 1 получаем ансамбль деревьев решений $\{T_i\}_{i=1}^B$;
3. Предсказание новых наблюдений для классификации осуществляется следующим образом:

Пусть $\hat{\omega}_i(x) \in \{\omega_1, \dots, \omega_c\}$ – класс, предсказанный деревом решений T_i , т. е. $T_i(x) = \hat{\omega}_i(x)$; тогда $\hat{\omega}_{rf}^B(x)$ (x) – класс, наиболее часто встречающийся в множестве $\{\hat{\omega}_i(x)\}_{i=1}^B$;

Алгоритм случайного леса в Python позволяет выявить признаки, наиболее значимо влияющие на результирующий фактор. Как и было получено с помощью критерия «хи-квадрат», ими оказались посещаемость и условия проживания.

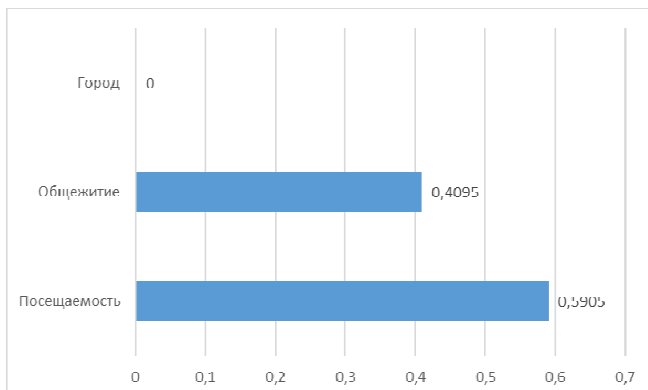


Рис. 1. Значимости признаков

Оценка качества модели. Теперь необходимо оценить качество модели [2]. Для этого используется матрица ошибок. Она содержит следующие значения: ложно-положительные (FP), истинно-положительные (TP), ложно-отрицательные (FN), истинно-отрицательные (TN).

Таблица 5.

Матрица ошибок

| | Predicted 0 | Predicted 1 |
|----------|-------------|-------------|
| Actual 0 | 8 (TN) | 1 (FP) |
| Actual 1 | 1 (FN) | 9 (TP) |

Сумма TP и TN показывает количество правильных прогнозов, в нашем случае – 17. Ошибочные прогнозы рассчитываются аналогично, их всего 2. Математическое выражение точности можно получить как $\frac{TP+TN}{TP+TN+FN+FP}$. В случае данной модели точность составила 0.89. Точность (precision) истинно положительных прогнозов определяется как отношение $\frac{TP}{TP+FP}$, то есть показывает долю ожидаемых положительных

событий. Чувствительность (recall) определяется как $\frac{TP}{TP+FN}$, то есть является долей правильно предсказанных положительных событий. Оценка f1(f1-score) представляет собой гармоническое среднее точности и чувствительности $\frac{2(precision \cdot recall)}{precision + recall}$.

| | precision | recall | f1-score | support |
|--------------|-----------|--------|----------|---------|
| 0 | 0.8889 | 0.8889 | 0.8889 | 9 |
| 1 | 0.9000 | 0.9000 | 0.9000 | 10 |
| accuracy | | | 0.8947 | 19 |
| macro avg | 0.8944 | 0.8944 | 0.8944 | 19 |
| weighted avg | 0.8947 | 0.8947 | 0.8947 | 19 |

Рис. 2. Полный отчет о классификации.

Заключение. По собранным данным были выявлены потенциально значимые факторы, влияющие на успеваемость студентов. С помощью алгоритма случайного леса была построена модель с высокой точностью прогнозирующая успеваемость. В дальнейшем планируется провести сравнительный анализ со студентами других вузов и, возможно, обнаружить ещё признаки, влияющие на успеваемость.

Список литературы

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – СПб. : Лань, 2010. — 704 с.
2. Андреас М., Сара Г. Введение в машинное обучение с помощью Python .– М. : Вильямс, 2016. — 393 с.
3. Руководство пользования Scikit-learn [Электронный ресурс]. – URL: https://scikit-learn.org/stable/user_guide.html (дата обращения: 27.05.2024).

STATISTICAL ASSESSMENT OF THE INFLUENCE OF VARIOUS FACTORS ON THE ACADEMIC PERFORMANCE OF MMF STUDENTS

O.Y. Serova, T.V. Emelyanova

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: oserova333@mail.ru

Abstract. The work processed data from third-year students of the TSU MMF. During the learning process, factors were identified that significantly influence the occurrence of academic debt. Using the chi-square test, the dependencies of the relevant factors were obtained. In addition, a random forest algorithm was used to build the model and further forecast. Knowing the factors that significantly affect academ-

ic performance makes it possible to eliminate them, and thereby prevent the occurrence of debt.

Keywords: academic performance, dependency search, chi-square test, random forest algorithm.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ОДНОКАМЕРНЫХ И ДВУХКАМЕРНЫХ СТЕКЛОПАКЕТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ANSYS FLUENT

П.А. Сомова, Е.И. Гурина

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: p.a.somova@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования тепловых потерь в составной конструкции теплоизоляционного окна с наполнением межстекольного пространства однокамерного и двухкамерного стеклопакетов осушенным воздухом.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, имитационное моделирование, метод конечных разностей, ANSYS Fluent, однокамерные стеклопакеты, двухкамерные стеклопакеты.

Введение. В последние годы практически все развитые страны периодически обновляют требования к нормативным документам, определяющим уровень защиты зданий от тепловых потерь. Исследования закономерностей теплопереноса, улучшение на их основе теплотехнических свойств строительных элементов и, как результат, повышение энергоэффективности зданий становятся приоритетными задачами. Актуальность данной проблемы подчеркивается не только в контексте современного строительства, но и в свете постоянного развития новых строительных материалов и технологий [1].

Физическая постановка задачи. В работе анализируется распространение тепла в составной конструкции теплоизоляционного окна, в наружной и внутренней створках которого установлены однокамерный и двухкамерный стеклопакеты. Величина воздушного промежутка между стеклопакетами – 200 мм. Формула остекления $4M_1 - 16 - 4M_1 - 200 - 4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$. Поставленная в работе задача решается несколькими этапами. На первом этапе моделировался процесс распространения тепла внутри однокамерного стеклопакета с формулой остекления $4M_1 - 16 - 4M_1$ с наполнением межстекольного пространства осушенным воздухом (рис.1). С математической постановкой задачи можно подробно ознакомиться в [2].

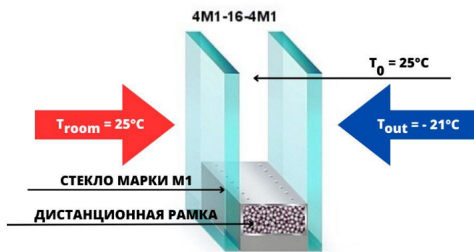


Рис. 1. Физическая постановка задачи однокамерного стеклопакета

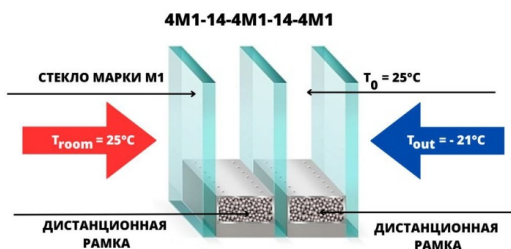


Рис. 2. Физическая постановка задачи двухкамерного стеклопакета

На втором этапе моделируется процесс распространения тепла внутри двухкамерного стеклопакета с формулой остекления $4M_1 - 14 - 4M_1 - 14 - 4M_1$, также на основе осушенного воздуха (рис. 2).

На первом и втором этапах математического моделирования в работе концентрируется внимание только на одном из основных механизмов переноса тепла – теплопроводности. Теплотери в однокамерном и двухкамерном стеклопакетах за счет конвекции не учитываются.

Математическая постановка задачи. Как и в случае с геометрией однокамерного стеклопакета, в рассматриваемой математической модели определения температурного поля в двухкамерном стеклопакете предполагается, что теплофизические характеристики не зависят от температуры и $\lambda = const, \rho = const, C_p = const$. Каждый слой моделируемого стеклопакета принимается однородным и рассматривается как неподвижная среда (твердое тело).

Рассмотрим конструкцию двухкамерного стеклопакета. В начальный момент времени все пять частей (рис.3) стеклопакета имеют одинаковую температуру $T_0 = 25^\circ\text{C}$.

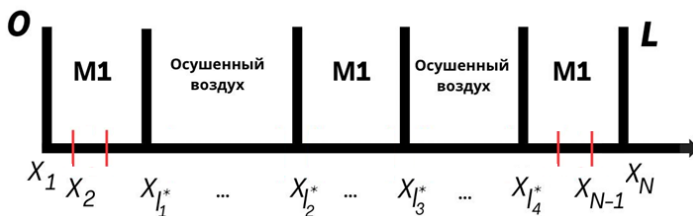


Рис. 3. Иллюстрация разностного разбиения расчетной области:

$x_1, x_{l_1^*}, x_{l_2^*}, x_{l_3^*}, x_{l_4^*}, x_N$ – координаты граничных узлов;

x_2, x_{N-1} – координаты внутренних узлов

Толщины каждого из слоёв конструкции принимаются следующими: 1, 3 и 5 слои (стекло марки М1) – $l_1 = l_3 = l_5 = 4$ мм; 2 и 4 слои (осушенный воздух) – $l_2 = l_4 = 14$ мм. На внутренней стороне (помещение) стеклопакета поддерживается постоянная температура $T_{room} = 25^\circ\text{C}$. Температура на внешней стороне конструкции (атмосфера) составляет $T_{out} = -21^\circ\text{C}$.

В процессе теплообмена участвуют пять слоев с различными теплофизическими свойствами, для каждого из слоев стеклопакета будем использовать свое уравнение теплопроводности с соответствующими значениями $\lambda = g(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности материала, $\text{Вт} / (\text{м} \cdot ^\circ\text{K})$; ρ – плотность, $(\text{кг} / \text{м}^3)$; C_p – удельная теплоёмкость, $(\text{Дж} / \text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 C_{p1} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \right), 0 < x < x_{i1}^*; \\
 \rho_2 C_{p2} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \right), x_{i1}^* < x < x_{i2}^*; \\
 \rho_3 C_{p3} \frac{\partial T_3}{\partial t} &= \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \right), x_{i2}^* < x < x_{i3}^*; \\
 \rho_4 C_{p4} \frac{\partial T_4}{\partial t} &= \lambda_4 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} \right), x_{i3}^* < x < x_{i4}^*; \\
 \rho_5 C_{p5} \frac{\partial T_5}{\partial t} &= \lambda_5 \left(\frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2} \right), x_{i4}^* < x < L.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 1,15 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$; $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = 2560 \text{ (кг /м}^3\text{)}$; $C_{p1} = C_{p3} = C_{p5} = 670 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$ – параметры стекла марки М1; $\lambda_2 = \lambda_4 = 0,0257 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$; $\rho_2 = \rho_4 = 1,186 \text{ (кг /м}^3\text{)}$; $C_{p2} = C_{p4} = 1005 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$ – параметры осушенного воздуха.

В начальный момент времени температура каждой части конструкции равна: $T(t, x)|_{t=0} = 25^\circ\text{C}, 0 \leq x \leq L$. (2)

На левой границе рассматривается граничное условие I рода: $T_{room}(t, x)|_{x=0} = 25^\circ\text{C}, t > 0$ (3)

Граничные условия IV рода действуют в зоне контакта стекла и межстекляного пространства, заполненного осушенным воздухом:

$$\begin{cases} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=x_{i1}^*} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x_{i1}^*}, \\ T_1(t, L_{x_{i1}^*}) = T_2(t, L_{x_{i1}^*}) \end{cases}, \begin{cases} \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=x_{i2}^*} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=x_{i2}^*}, \\ T_2(t, L_{x_{i2}^*}) = T_3(t, L_{x_{i2}^*}) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=x_{i3}^*} = \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} \Big|_{x=x_{i3}^*}, \\ T_3(t, L_{x_{i3}^*}) = T_4(t, L_{x_{i3}^*}) \end{cases}, \begin{cases} \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial x} \Big|_{x=x_{i4}^*} = \lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial x} \Big|_{x=x_{i4}^*}, \\ T_4(t, L_{x_{i4}^*}) = T_5(t, L_{x_{i4}^*}) \end{cases}$$

На выходе из рассматриваемой области действует граничное условие III рода: $-\lambda_5 \left(\frac{\partial T_5}{\partial x} \right) = k(T_5 - T_{out}), t > 0$ (5), где $k = 10 \text{ Вт / (м} \cdot \text{°C)}$ – коэффициент теплообмена между стеклом и холод-

ным воздухом, $x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, x_{i_3}^*, x_{i_4}^*$ – координаты границы раздела сред, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 – температура соприкасающихся частей пластины, T_{cp} – температура окружающей среды.

Дифференциальные уравнения в частных производных (1) с начально-краевыми условиями (2) - (5), а также иными условиями однозначности (геометрическими, физическими) составляют полную математическую формулировку рассматриваемой задачи теплопроводности.

Численное решение поставленной задачи реализовано на C++ на основе метода конечных разностей с использованием явной разностной схемы. Верификация полученных численных результатов проводилась с данными, полученными в результате компьютерного моделирования процесса теплопередачи в конструкции теплоизоляционного окна в пакете гидродинамики ANSYS Fluent.

Результаты численного моделирования и верификация. Приведем результаты серии расчетов для однокамерного стеклопакета с учетом переменной толщины дистанционной рамки. При этом будем использовать ГУ III рода не только на правой границе расчетной области, где идет взаимодействие с температурой воздуха из окружающей среды, но и на левой для того, чтобы описать конвективный теплообмен между стеклом и окружающей его средой со стороны комнаты.

На рисунке 4 представлено распределение температуры по толщине конструкции однокамерных стеклопакетов с длиной дистанционных профильных рамок 24 мм, 22 мм и 20 мм соответственно спустя 180 мин.

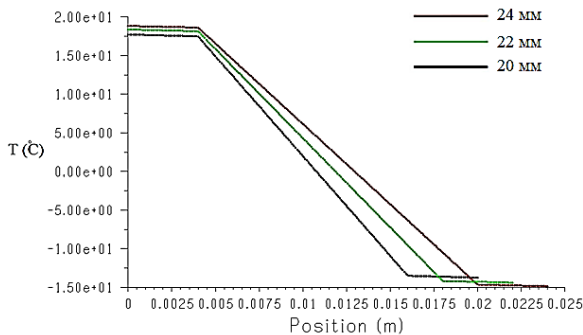


Рис. 4. Распределение температуры по толщине конструкции однокамерного стеклопакета спустя 180 мин (спейсер 24 мм, 22 мм, 20 мм)

Рассмотрим распределение температуры по толщине конструкций однокамерного (4M1 – 16 – 4M1) и двухкамерного стеклопакетов (4M1 – 14 – 4M1 – 14 – 4M1) спустя 10 мин, 30 мин, 60 мин и 180 мин (рис. 5, 6).

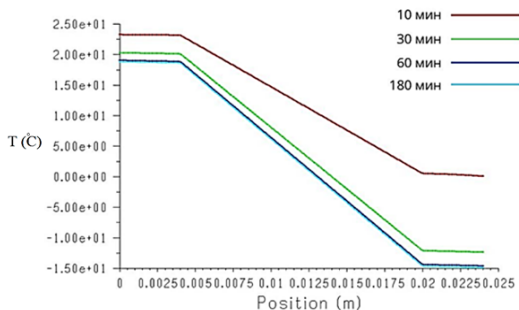


Рис. 5. Распределение температуры по толщине конструкции однокамерного стеклопакета с течением времени

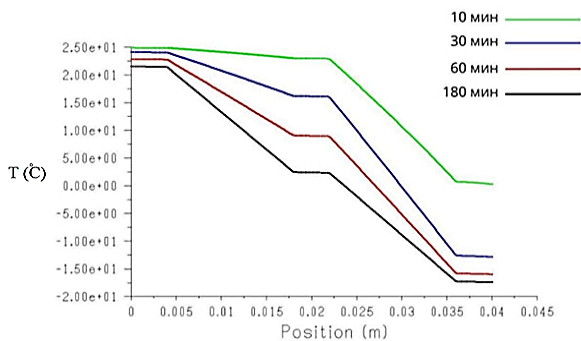


Рис. 6. Распределение температуры по толщине конструкции двухкамерного стеклопакета с течением времени

Проведём сравнение распределения температуры вдоль средней линии однокамерного (4M1 – 16 – 4M1) с длиной дистанционной рамки 24 мм и двухкамерного (4M1– 14 – 4M1 – 14 – 4M1) стеклопакетов спустя 3 часа (рис. 7).

Для оценки теплофизических свойств однокамерного и двухкамерного стеклопакетов была использована гипотетическая модель, в которой стеклопакеты были установлены между небольшой комнатой и помещением большего размера. Размеры и начальная температура T_0 в помещениях были приняты следующими:

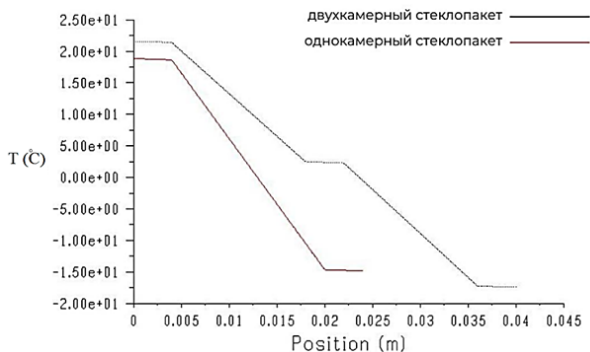


Рис. 7. Сравнение распределения температуры вдоль средней линии однокамерного и двухкамерного стеклопакетов спустя 3 часа

- жилая комната ($T_{room} = 25^{\circ}C$) с адиабатическими стенками: 3000*3000 мм;
- атмосферный домен ($T_{atm} = -21^{\circ}C$): 10000*10000 мм.

Для удобства анализа полученных результатов расчета установили две точки контроля для однокамерного и двухкамерного стеклопакетов: со стороны комнатного стекла и со стороны улицы, и визуализировали распределение температуры в расчётной области с установленными однокамерным и двухкамерным стеклопакетами между помещениями спустя 3, 5 и 10 часов.

Закключение. Сравнение однокамерных стеклопакетов с разной длиной профильных дистанционных рамок 24 мм, 22 мм и 20 мм показало, что стеклопакет с толщиной дистанционной рамки 20 мм быстрее всего отводит тепло из помещения. Из чего следует, что стеклопакеты с наименьшей длиной спейсера являются наименее эффективными с теплоизоляционной точки зрения.

Численные результаты расчета показали, что в точке со стороны комнатного окна спустя 5 часов будет на 4.3% теплее, чем при использовании однокамерного стеклопакета, а спустя 10 часов – на 6.2% теплее. Если в доме или здании большая площадь остекления, то теплопотери при использовании однокамерных стеклопакетов будут значительно выше, чем при использовании двухкамерных. Кроме того, если учесть экономию энергоресурсов на долгосрочную перспективу, применение двухкамерных стеклопакетов оказывается особенно целесообразным.

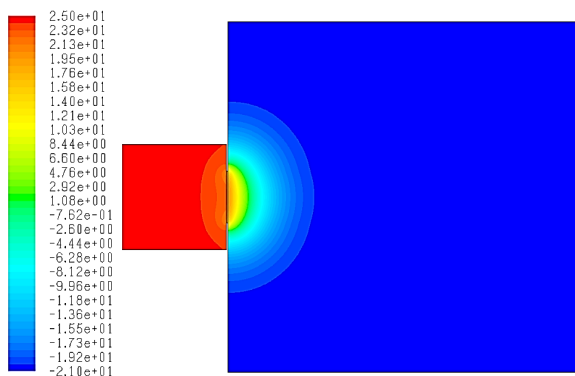


Рис. 8. Распределение температуры в расчетной области с установленным двухкамерным стеклопакетом спустя 10 часов, °С

Список литературы

1. Иванова Е.А. Теплоперенос в теплонепряженных элементах многослойных ограждающих конструкций : дисс. ... канд. техн. наук [Электронный ресурс]. – Томск, 2023. – URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:001009126>.
2. Натяров А.Н., Гурина Е.И., Сомова П.А. Математическое моделирование влияния теплофизических свойств на эффективность стеклопакетов. Ч.1 // Все грани математики и механики : сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции. – Томск : ТГУ, 2023. – С. 65–76. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=54155544>.
3. Dubois G., Sovacool B., Aall C. et al. It starts at home? Climate policies targeting household consumption and behavioral decisions are key to low-carbon futures [Electronic resource] // Energy Research & Social Science. – 2019, June. – Vol. 52, – P. 144–158. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214629618310314>.
4. ГОСТ 24866–2014 Стеклопакеты клееные. Технические условия [Электронный ресурс]. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200120572>.
5. ISO 10077-1:2017 Thermal performance of windows, doors and shutters – Calculation of thermal transmittance. Part 1 [Electronic resource]. – URL: <https://www.iso.org/standard/67090.html>.
6. Кузнецов Г.В., Шерemet М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. – Томск : Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
7. Беликов Д.А., Гольдин В.Д., Нутерман Р.Б. и др. FLUENT (виртуальный лабораторный практикум) [Электронный ресурс]. – URL: <https://old.math.tsu.ru/EEResources/fluent/index.html>.

NUMERICAL STUDY OF THE HEAT TRANSFER PROCESS
IN SINGLE-CHAMBER AND DOUBLE-CHAMBER
DOUBLE-GLAZED WINDOWS USING ANSYS FLUENT

P.A. Somova, E.I. Gurina

National Research Tomsk State University

Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: p.a.somova@gmail.com

Abstract. The actual problem of modeling heat losses in the composite structure of a heat-insulating window with filling the interstitial space of single-glazed and double-glazed windows with dried air is considered in this paper.

Keywords: thermal conductivity equation, simulation modeling, finite difference method, Ansys Fluent, double-glazed windows.

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕРМОШКАФА С ПАССИВНЫМ ОБОГРЕВОМ В УСЛОВИЯХ СЕВЕРНЫХ РЕГИОНОВ

И.В. Тренбач, Е.И. Гурина

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: ivantrenbac@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования температурных характеристик термошкафа с пассивным обогревом за счет тепловой мощности нефтегазоводяной смеси в трубопроводе.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, имитационное моделирование, метод конечных разностей, ANSYS Fluent, термошкаф с пассивным обогревом, трубопровод.

Введение. В последние года чрезвычайно расширилась сфера интенсивного исследования и применения явлений теплообмена, изучение которых играет важную роль в развитии техники и естествознания.

Термошкафы РизурБокс применяются для защиты оборудования от воздействия низких температур, конденсата, атмосферных осадков, пыли, химикатов, физических повреждений, несанкционированного доступа. Шкаф защитный утепленный типа *РизурБокс-С-Т7* представляет собой многослойный корпус, выполненный на основе пожаростойких ненасыщенных полиэфирных смол и стеклоармирующих материалов. Для обеспечения термоизоляции между внутренней и внешней оболочкой шкафа применяется вспененный пенополиуретановый утеплитель [1].

Физическая постановка задачи. В данной работе рассматривается процесс распределения тепла внутри двумерного сечения термошкафа *РизурБокс-С-Т7* (рис. 1). Численное моделирование распространения тепла в семислойной конструкции (рис. 2) термошкафа проводится с помощью метода конечных разностей на основе неявной разностной схемы [2] в одномерной постановке.

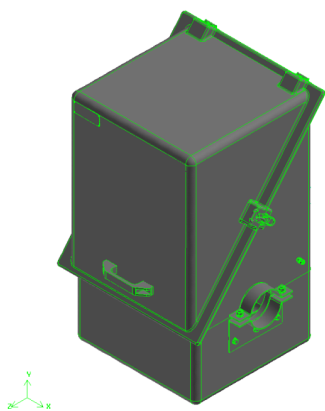


Рис. 1. Геометрия РизурБокс-С-Т7, построенная в Gambit

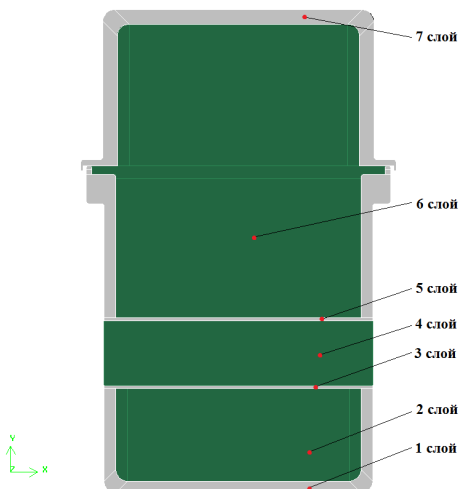


Рис. 2. Семислойная конструкция расчетного домена

Толщина каждого из слоёв конструкции термощкафа принята следующей:

1 слой (вспененный полиэтилен) – $l_1 = 20$ мм; **2 слой** (воздух) – $l_2 = 159.5$ мм; **3 слой** (сталь класса прочности К48) – $l_3 = 5$ мм; **4 слой** (нефтегазоводяная смесь) – $l_4 = 111$ мм; **5 слой** (сталь класса прочности К48) – $l_5 = 5$ мм; **6 слой** (воздух) – $l_6 = 503.3$ мм; **7 слой** (вспененный полиэтилен) – $l_7 = 25$ мм.

В начальный момент времени (Рис.3) все семь частей термошкафа имеют одинаковую температуру $T_0 = -51$ °С. В 4-м слое конструкции (нефтегазоводяная смесь) поддерживается постоянная температура среды $T_{oil} = -54.8$ °С. Температура на внешней стороне конструкции (атмосфера) $T_{out} = -51$ °С.

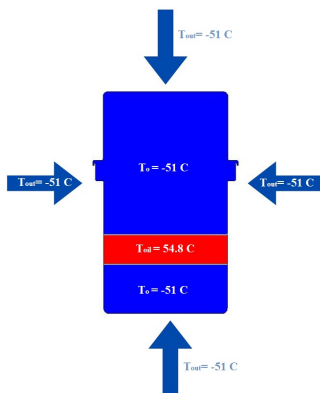


Рис. 3. Физическая постановка задачи

Математическая постановка задачи. С помощью математического и численного моделирования необходимо определить значение температуры в каждой точке рассматриваемой конструкции термошкафа *РизурБокс-С-Т7* с течением времени. В рассматриваемой математической модели определения температурного поля в сечении термошкафа предполагается, что теплофизические характеристики не зависят от температуры и $\lambda = const, \rho = const, C_p = const$. Каждый слой моделируемого термошкафа принимается однородным и рассматривается как неподвижная среда (твердое тело). В процессе теплообмена участвуют семь слоев с различными теплофизическими свойствами, для каждого из слоев будем использовать свое уравнение теплопроводности с соответствующими теплофизическими параметрами:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 C_{p_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \right), 0 < x < L_1; \\
 \rho_2 C_{p_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \right), L_1 < x < L_2; \\
 \rho_3 C_{p_3} \frac{\partial T_3}{\partial t} &= \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \right), L_2 < x < L_3; \\
 \rho_4 C_{p_4} \frac{\partial T_4}{\partial t} &= \lambda_4 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} \right), L_3 < x < L_4; \\
 \rho_5 C_{p_5} \frac{\partial T_5}{\partial t} &= \lambda_5 \left(\frac{\partial^2 T_5}{\partial x^2} \right), L_4 < x < L_5; \\
 \rho_6 C_{p_6} \frac{\partial T_6}{\partial t} &= \lambda_6 \left(\frac{\partial^2 T_6}{\partial x^2} \right), L_5 < x < L_6; \\
 \rho_7 C_{p_7} \frac{\partial T_7}{\partial t} &= \lambda_7 \left(\frac{\partial^2 T_7}{\partial x^2} \right), L_6 < x < L.
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $T(t, x)$ – температура ($^{\circ}\text{C}$); ρ – плотность материала (кг/м^3), C_p – удельная теплоемкость ($\text{Дж/кг}\cdot^{\circ}\text{C}$), λ – коэффициент теплопроводности ($\text{Вт/м}\cdot^{\circ}\text{C}$).

В начальный момент времени температура каждой части конструкции равна: $T(t, x)|_{t=0} = -51^{\circ}\text{C}, 0 \leq x \leq L$. (2)

На левой границе рассматривается граничное условие I рода: $T(t, x)|_{x=0} = -51^{\circ}\text{C}, t > 0$ (3)

В зонах контакта первых двух внутренних слоев пластины действуют граничные условия IV рода:

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} |_{x=L_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} |_{x=L_{i+1}}, & i \in \overline{1,2} \\ T_i(t, x_i) = T_{i+1}(t, x_{i+1}) \end{cases} \tag{4}$$

В зонах контакта с четвертым слоем пластины действуют граничные условия I рода:

$$T(t, x)|_{x=L_3} = 54.8^{\circ}\text{C}, \quad T(t, x)|_{x=L_4} = 54.8^{\circ}\text{C}, \quad t > 0 \tag{5}$$

Температуру в четвертом слое пластины считаем постоянной:

$$t > 0: T_4(t, x) = 54.8^{\circ}\text{C}, \quad L_3 \leq x \leq L_4 \tag{6}$$

В зонах контакта двух оставшихся внутренних слоев пластины действуют граничные условия IV рода:

$$\begin{cases} \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} |_{x=L_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} |_{x=L_{i+1}}, & i \in \overline{5,6} \\ T_i(t, x_i) = T_{i+1}(t, x_{i+1}) \end{cases} \tag{7}$$

Граничные условия III рода рассматриваются при выходе из области ($x = L$), где осуществляется теплообмен с окружающей средой:

$$-\lambda_7 \left(\frac{\partial T_7}{\partial x} \right) = k(T_7 - T_{cp}), \quad t > 0 \quad (8)$$

где k – коэффициент теплообмена между термощкафом и воздухом, L_i – координаты границы раздела сред, T_i – температура соприкасающихся частей пластины, T_{cp} – температура окружающей среды (уличный воздух). Дифференциальные уравнения в частных производных (1) с начально краевыми условиями (2) – (8) составляют полную математическую формулировку рассматриваемой задачи теплопроводности.

Численное решение поставленной задачи реализовано на C++ на основе метода конечных разностей с использованием явной разностной схемы. Область непрерывного изменения аргумента $x \in [0, L]$ заменяется на дискретное множество точек:

$x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, N$, где h – шаг сетки (рис. 4).

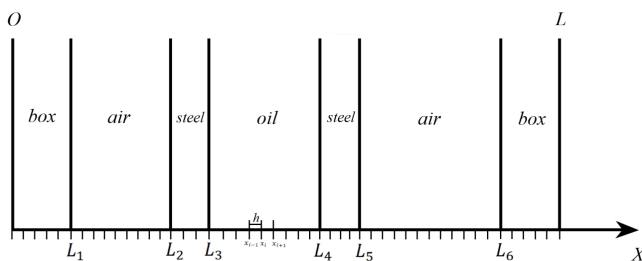


Рис. 4. Иллюстрация разностного разбиения расчетной области

Верификация полученных численных результатов проводилась с данными, полученными в результате компьютерного моделирования процесса теплопередачи в конструкции термощкафа в пакете гидродинамики ANSYS Fluent [3].

Результаты численного моделирования и верификация. На рисунке 6 представлены графики распределения температуры по толщине семислойной пластины спустя 10, 20, 30, 60, 180 и 300 минут, полученные с помощью разработанного на C++ алгоритма.

На рисунке 5 представлены графики распределения температуры по толщине пластины спустя 10 минут, полученные с использованием МКР и AnsysFluent.

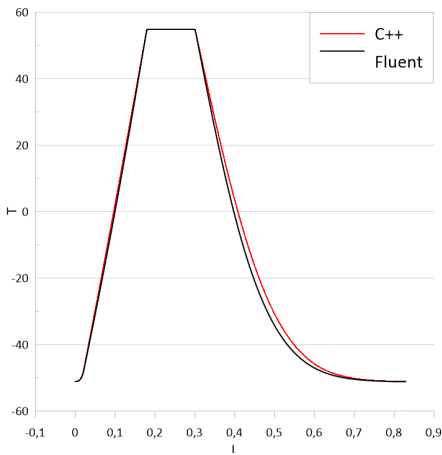


Рис. 5. Сравнение результатов расчета, полученных с использованием МКР и AnsysFluent

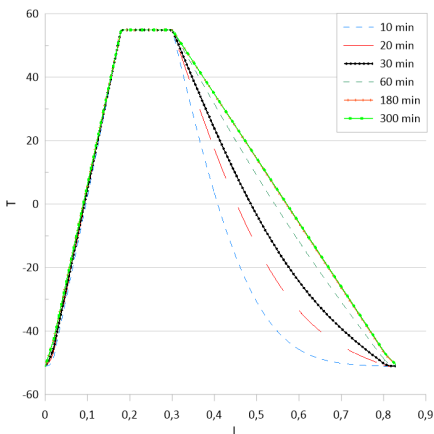


Рис. 6. Распределение температуры в многослойной пластине (C++)

Ниже представлена серия рисунков с визуализацией протекающего процесса с течением времени (рис. 7, 8).

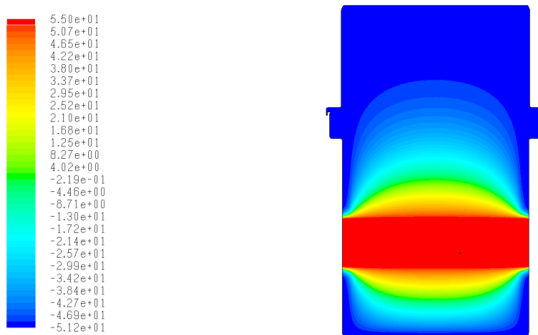


Рис. 7. Распределение температуры по толщине конструкции термошкафа спустя 10 минут

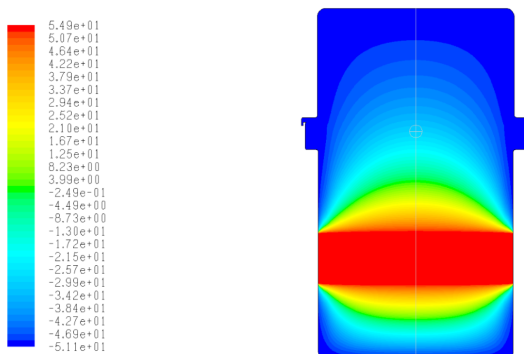


Рис. 8. Распределение температуры по толщине конструкции термошкафа спустя 60 минут

Закключение. В данной работе было рассмотрено численное решение задачи теплообмена на основе метода конечных разностей. Был разработан алгоритм численного решения дифференциальной задачи, описывающей процесс распространения тепла внутри термошкафа. В работе было проведено численное моделирование рассматриваемого процесса теплообмена в пакете AnsysFluent.

В качестве результатов работы были построены графики распределения температуры в термошкафе, представлена визуализация распространения тепла внутри сечения термошкафа. Для верификации разработанного алгоритма было проведено сравнение результатов численного расчёта, полученных с помощью МКР и AnsysFluent.

Список литературы

1. Термошкафы стеклопластиковые РизурБокс-С-Т (RizurBox-C-T) диагонального раскрытия с поддоном. [Электронный ресурс]. – URL: <https://rizur.ru/catalog/termoshkafy/termoshkafy-stekloplastikovye-diagonalnogo-raskrytiya-s-poddonom/>
2. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. – Томск : Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
3. Беликов Д.А., Гольдин В.Д., Нутерман Р.Б. и др. FLUENT (виртуальный лабораторный практикум) [Электронный ресурс]. – URL: <https://old.math.tsu.ru/EEResources/fluent/index.html>.

NUMERICAL CALCULATION OF THE TEMPERATURE CHARACTERISTICS OF A THERMAL CABINET WITH PASSIVE HEATING UNDER THE CONDITIONS OF THE NORTHERN REGIONS

I.V. Trenbach, E.I. Gurina

National Research Tomsk State University
Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: ivantrenbac@gmail.com

Abstract. In the present study, we consider the actual problem of modeling the temperature characteristics of a thermal cabinet with passive heating due to the thermal power of an oil-gas-water mixture in a pipeline.

Keywords: the equation of thermal conductivity, simulation modeling, finite difference method, Ansys Fluent, thermal cabinet with passive heating, pipeline.

УДК 665.455:006.354

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ДИЛАТАНТНОЙ ЖИДКОСТИ СИСКО В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Н.С. Фирсанова¹, О.В. Матвиенко^{1,2}

¹ Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

² Томский государственный архитектурно-строительный
университет
Россия г. Томск, пл. Соляная, 2, 634003
E-mail: matvolegv@mail.ru

Аннотация. Проведено исследование установившегося течения дилатантной жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе, определена зависимость эффективной вязкости от реологических параметров и перепада давления.

Ключевые слова: реология, дилатантные среды, вязкость, неньютоновские жидкости, модель Сиско.

Введение. Течение растворов и расплавов полимеров описывается нелинейной зависимостью эффективной вязкости от интенсивности скоростей сдвиговых деформаций [1]. Среда, вязкость которых увеличивается с ростом скорости сдвига, называются дилатантными жидкостями. При низких скоростях сдвига эти жидкости имеют низкую вязкость и легко текут [2]. Однако при более высоких скоростях сдвига их вязкость значительно увеличивается.

На практике также часто встречаются системы, обладающие пространственной структурой: если величина приложенного к среде напряжения мала, то среда ведет себя подобно твердому телу [3, 4]. Прочность структуры характеризуется предельным напряжением сдвига σ . При достижении этого напряжения происходит разрушение твердофазной структуры, что приводит к резкому уменьшению вязкости. Таким образом, при высоких сдвиговых напряжениях среда ведет себя подобно вязкой жидкости [5].

Для описания деформационного поведения различных структурированных дисперсных сред существует множество реологических моделей, передающих в определенном диапазоне напряжений сдвига отдельные особенности реального течения [3–15].

Настоящая работа является продолжением исследования течений неньютоновских сред [16–35]. Целью настоящей работы является

исследование установившегося течения дилатантной жидкости Сиско в цилиндрической трубе.

Постановка задачи. Рассмотрим установившееся осесимметричное течение жидкости в прямой горизонтальной трубе круглого сечения радиуса R . Координату x , отсчитываемую вдоль оси трубы, направим вниз по потоку. Ограничимся исследованием стабилизированного течения вдали от входного течения, когда жидкость движется параллельно оси трубы.

В этом случае уравнение движения жидкости примет вид [36]:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \mu_{\text{eff}} \frac{du}{dr} \right) = - \left| \frac{dp}{dx} \right|. \quad (1)$$

Интегрирование уравнения (1) с учетом граничного условия

$$r=0: \quad \frac{du}{dr} = 0; \quad r=R: \quad u=0. \quad (2)$$

В случае установившегося течения течение дилатантной жидкости Сиско ($u_x = u(r)$, $u_r = 0$, $u_\varphi = 0$) реологическое соотношение принимает вид:

$$\mu_{\text{eff}} = \mu_0 + k \left| \frac{du}{dr} \right|^{n-1} \quad (3)$$

С учетом соотношения (1) запишем уравнение движения в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\mu_0 + k \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \right] = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4)$$

Результаты решения. Выполним интегрирование уравнения (4) с граничными условиями (2) при значении показателя нелинейности $n = 2$:

$$\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} - k \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 = - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| r. \quad (5)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как алгебраическое уравнение относительно скорости сдвига $\frac{\partial u}{\partial r}$. В результате решения этого уравнения получим:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2k} \left[\mu_0 - \sqrt{\mu_0^2 + 2k \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| r} \right]. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения (6) с учетом условия прилипания на стенке позволяет определить радиальное распределение скорости жидкости в канале:

$$u = \frac{1}{6k^2 \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}} \left[\left(\mu_0^2 + 2k \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| R \right)^{3/2} - \left(\mu_0^2 + 2k \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| r \right)^{3/2} \right] - \frac{\mu_0(R-r)}{2k}.$$

Максимальная скорость жидкости достигается на оси потока:

$$u_{\max} = \frac{1}{6k^2 \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1}} \left(\mu_0^2 + 2k \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| R \right)^{3/2} - \frac{\mu_0 R}{2k}.$$

Для определения эффективной вязкости воспользуемся реологическим соотношением (3) с учетом радиального распределения скорости. В результате получим:

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \mu_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|}{\mu_0^2} r} \right).$$

Заключение. Проведено исследование установившегося течения дилатантной жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе, определена зависимость эффективной вязкости от реологических параметров и перепада давления.

Список литературы

1. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. – СПб. : Профессия, 2007. – 560 с.
2. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. – М. : Мир, 1964.
3. Лескин А.И., Гофман Д.И., Алексиков С.В. и др. Органическая композиция для восстановления свойств вяжущего в асфальтогрануляте // Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2019. – Вып. 1(74). – С. 33–39.
4. Полянский Ю.И., Щекочихина Е.В., Калиновский С.А. и др. Реологические свойства сарматских глин с нарушенной структурой // Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2019. – Вып. 2(75). – С. 11–19.
5. Климов Д.М., Петров А.Г., Георгиевский Д.В. Вязкопластические течения: динамический хаос, устойчивость и перемешивание. – М. : Наука, 2005.

6. Кутепов А.М., Полянин Л.Д., Запрянов З.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. – М. : Бюро Квантум, 1996.
7. Матвиенко О.В., Унгер Ф.Г., Базуев В.П. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем. – Томск : Изд-во ТГАСУ, 2015.
8. Островский Г.М. Прикладная механика неоднородных сред. – СПб. : Наука, 2000. – 359 с.
9. Sybilski D. Non-newtonian viscosity of polymer-modified bitumens // *Materials and Structures*. – 1993. – Vol. 26. – P. 15–23. – doi: 10.1007/BF02472233.
10. Williamson R.V. The flow of pseudoplastic materials // *Industrial and Engineering Chemistry*. – 1929. – Vol. 21(11). – P. 1108–1111.
11. Каныгин В.А. Безнапорное течение вязкопластичной жидкости // *Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура*. – 2016. – № 45(64). – С. 114–118.
12. Шульман З.П., Байков В.И., Бендерская С.Л. Течение пленки вязкопластичной жидкости при динамическом воздействии // *Инженерно-физический журнал*. – 1977. – Т. 33, № 4. – С. 666–670.
13. Herschel W.H., Bulkley R., Konsistenzmessungen von Gummi-Benzol-Lösungen // *Kolloid Z.* – 1926. – Vol. 39. – P. 291–300.
14. Patel M., Patel J., Timol M.G. Laminar boundary layer flow of sisko fluid // *Applications and Applied Mathematics Intern. J.* – 2015. – Vol. 10(2). – P. 909 – 918.
15. Moallemi N., Shafieenejad I., Novinzadeh A.B. Exact solutions for flow of a Sisko fluid in pipe // *Special Issue of the Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. – 2011. – Vol. 37, No. 2, Part 1. – P. 49–60.
16. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Сабылина Н.Р. и др. Исследование установившегося течения вязкопластического битумного вязжущего, описываемого моделью Шведова–Бингама, в цилиндрической трубе // *Вестник ТГАСУ*. – 2019. – Т. 21, № 3. – С. 158–177.
17. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале // *Инженерно-физический журнал*. – 2014. – Т. 87, № 5. – С. 1129–1137.
18. Матвиенко О.В., Литвинова А.Е. Исследование установившегося течения высокопарафинистого битумного вязжущего, описываемого моделью Балкли–Гершеля, в цилиндрической трубе // *Вестник ТГАСУ*. – 2021. Т. 23, № 4. – С. 79–99.
19. Матвиенко, О.В., Литвинова А.Е., Фирсанова Н.С. Исследование расходных характеристик установившегося течения высокопарафинистого битумного вязжущего в цилиндрической трубе // *Вестник ТГАСУ*. – 2021. – Т. 23, № 5. – С. 71–85.

20. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И.С. и др. Течение битумного вязущего, описываемого моделью Оствальда – де Вейля, в цилиндрической трубе // Вестник ТИАСУ. – 2020. – Т. 22, № 1. – С. 171–192.
21. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Черкасов И.С. и др. Исследование гидравлических характеристик потока водно-песчаной суспензии в трубе // Вестник ТГАСУ. – 2020. – Т. 22, № 2. – С. 129–144.
22. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Дульзон Н.К. и др. Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах // Вестник ТГАСУ. – 2014. – № 2(43). – С. 80–93.
23. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Смирнова Н.Г. и др. Исследование смешения коаксиальных закрученных потоков для приготовления битумных дисперсных систем // Вестник ТГАСУ. – 2014. – № 3(44). – С. 123–134.
24. Матвиенко О.В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале // Известия вузов. Физика. – 2014. – Т. 57, № 8-2. – С. 183–189.
25. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 3. – С. 544–547.
26. Матвиенко О. В., Базуев В. П., Южанова Н. К. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 192–199.
27. Матвиенко О.В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе // Вестник Томского гос. ун-. Серия: Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 99–112.
28. Матвиенко О.В., Асеева А.Е. Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 4. – С. 857–869.
29. Матвиенко О. В., Евтюшкин Е. В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 2. – С. 243–252.
30. Matvienko O.V., Bazuev V.P., Venik V.N. et al. Numerical investigation of Herschel–Bulkley fluids mixing // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Advanced Materials in Construction and Engineering. Ser. "International Scientific Conference of Young Scientists: Advanced Materials in Construction and Engineering, TSUAB 2014" – 2015. – Art. No. 012034.
31. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли–

- Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 1. – С. 215–226.
32. Матвиенко О.В., Базуев В.П., Асеева А.Е. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли–Гершеля в цилиндрическом канале // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 6. – С. 2641–2651.
33. Матвиенко О. В., Литвинова А. Е., Фирсанова Н. С. Исследование структуры течения полимерно-битумного вязущего, описываемого моделью Кросса, в трубе с внезапным расширением. Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2022. – Т. 24, № 5. – С. 151–168.
34. Матвиенко, О. В., Фирсанова Н. С. Исследование установившегося течения гущающей жидкости в цилиндрической трубе // Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2023. – № 2(91). – С. 157–167.
35. Матвиенко О.В., Эфа А.К., Базуев В.П. и др. Численное моделирование распада турбулентной струи в спутном закрученном потоке // Известия вузов. Физика. – 2006. – Т. 49, № 6. – С. 96–107.

STUDY OF THE STEADY FLOW OF DILATANT LIQUID SISCO IN A CYLINDRICAL PIPE

N.S. Firsanova¹, O.V. Matvienko^{1,2}

¹ National Research Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin Ave., 30, 634050

² Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering, Russia
Tomsk, pl. Solyanaya, 2, 634003
E-mail: matvolegv@mail.ru

Abstract. A study was carried out of the steady flow of a dilatant fluid described by the Sisco model in a cylindrical pipe, and the dependence of the effective viscosity on rheological parameters and pressure drop was determined.

Keywords: Rheology, dilatant media, viscosity, non-Newtonian fluids, Sisco model.

УДК 533, 004.89

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ И ИИ ДЛЯ СОЗДАНИЯ 3D МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ГИДРО- И АЭРОДИНАМИКИ

К.С. Шультайс, Е.А. Тарасов

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: karinashultais@yandex.ru

Аннотация. Данная работа посвящена поиску и анализу цифровых инструментов, подходящих для решения задач механики жидкости и газа (МЖГ). Рассматриваются такие подходы для работы с цифровыми инструментами как написание кода, создание 3D моделей, использование математических пакетов для проведения вычислений. Также рассматриваются типы искусственного интеллекта (ИИ) и задачи, которые можно решать, применяя ИИ. Кроме того, рассматриваются проблемы, возникающие при использовании цифровых инструментов и ИИ. По результатам данной работы определяются цифровые инструменты, с помощью которых будет построена 3D модель автомобиля и произведено моделирование ее аэродинамических показателей.

Ключевые слова: цифровые инструменты и ИИ, 3D модель, МЖГ, CFD-моделирование.

Введение. В современном мире цифровые инструменты играют ключевую роль в решении задач механики. Для создания 3D моделей в задачах гидро- и аэродинамики применяются такие инструменты, как САД-программы, компьютерные симуляции и виртуальные модели. Кроме того, в последнее время все большее внимание уделяется применению искусственного интеллекта для оптимизации процесса моделирования.

Для работы с цифровыми инструментами в механике существует несколько подходов. Это может быть написание специализированного кода для расчетов на ЯПВУ (например, Python, C++, MathLab), построение 3D моделей (для дальнейшего их использования при расчетах задач гидро и аэродинамики) и преобразование в 3D по комплексу изображений с помощью специализированных программ (Solid works, T-flex, Unity, Blender), использование пакетов (Comsol, OpenFOAM, Ansys), специального ПО (например, российское ПО ЛОГОС), применение искусственного интеллекта (нейросети) и др.

Искусственный интеллект (ИИ) применяется для решения широкого спектра задач в различных областях. Существует несколько типов искусственного интеллекта:

- 1) *сильный и слабый ИИ*, где сильный ИИ представляет собой систему, способную решать любые задачи, которые человек может выполнить, в то время как слабый ИИ ограничивается выполнением конкретных задач;
- 2) *машинное обучение* – подразделение искусственного интеллекта, которое позволяет компьютерам учиться на основе данных и опыта, без явного программирования;
- 3) *глубокое обучение* – подтип машинного обучения, который использует нейронные сети с несколькими слоями для извлечения сложных шаблонов из данных;
- 4) *нейронные сети* – модель, вдохновленная работой человеческого мозга, которая используется для обработки информации и принятия решений.

Искусственный интеллект применяется для решения таких задач как: работа с данными / анализ данных (анализ изображений, анализ видео-аудиоданных, машинное обучение, обработка естественного языка, цифровые двойники, генерация данных); преобразование данных (преобразование изображений в 3D модели, преобразование текста в фото/видео/аудио формат); визуализация данных (построение графиков/диаграмм/гистограмм/изображений, построение 2D и 3D моделей).

В механике цифровые инструменты в основном применяются для решения задач в таких областях как теоретическая механика, механика жидкости и газа (МЖГ), механика деформируемого твердого тела (МДТТ). Также, цифровые инструменты в вышеперечисленных областях можно применить для решения задач автомобилестроения.

В области теоретической механики цифровые инструменты применяются для решения задач движения автомобиля и оптимизации траектории движения автомобиля. Математически это описывается с помощью второго закона Ньютона:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F},$$

где \vec{F} – равнодействующая сил, $\frac{d}{dt}(m\vec{v})$ – производная по времени от количества движения. Задачи движения автомобиля можно решать с использованием таких цифровых инструментов как MATLAB, Python.

В области МЖГ цифровые инструменты могут применяться, например, для расчета аэродинамических показателей кузова автомо-

биля. Математически это описывается при помощи уравнений Навье–Стокса:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0,$$

Уравнение движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f},$$

где ρ – плотность, \mathbf{v} – скорость потока, p – давление, ν – кинематический коэффициент вязкости, \mathbf{f} – внешние силы. Задачи, связанные с расчетом аэродинамических показателей, решаются с помощью таких инструментов, как пакеты ANSYS Fluent, OpenFOAM, ПО ЛОГОС.

В области МДТТ цифровые инструменты нужны для моделирования краш-тестов и деформаций кузова. Математическое описание составляется с использованием уравнения равновесия и закона Гука.

Уравнения равновесия:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где ϵ_{ij} – тензор деформаций, u_{ij} – компоненты вектора перемещений.

Закон Гука (линейная упругость):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl},$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, C_{ijkl} – тензор упругих постоянных (модуль упругости, коэффициенты Пуассона), ϵ_{kl} – компоненты тензора деформаций. Моделирование можно производить, используя ПО ЛОГОС, LS-DYNA, Apps for solid mechanics + fracture mechanics (для MATLAB).

Использование искусственного интеллекта и цифровых инструментов в каждом из этих примеров позволяет повысить точность расчетов и оптимизировать процессы. Также, можно применять ИИ для составления 3D модели, с которой уже будут производиться различные вычисления в математических пакетах и ПО.

Существует нейросеть Alpha 3D, которая по описанию должна по изображению преобразовывать загруженное изображение в 3D модель. Однако она «натягивает» загруженное изображение на готовую 3D модель простой формы, например на кроссовок или диван.



Рис. 1. Исходное изображение



Рис. 2. Полученная 3D модель

Как можно видеть из представленных на рисунках результатов построения модели, данный инструмент не подходит для построения модели автомобиля по его изображению в задачах МЖГ и требуется модификация нейросети, для дальнейшей работы. Исходя всего выше описанного, можно сделать вывод, что, применяя ИИ и цифровые инструменты в моделировании, возникают такие проблемы, как:

1. *Несовершенство работы ИИ и нейросетей.* Современные нейронные сети и искусственный интеллект могут недостаточно точно интерпретировать запрос пользователя, что приводит к возникновению проблемы несоответствия ожидаемого результата.
2. *Вычислительная сложность.* Некоторые модели могут быть очень сложными и требовать больших вычислительных ресурсов для их выполнения. Это может привести к необходимости использования мощных компьютеров.
3. *Недостаточная точность.* При моделировании могут возникнуть ошибки из-за ограничений численных методов или упрощений в моделях. Это может привести к неточным результатам и неправильным выводам.
4. *Нехватка данных.* Для построения точных моделей требуется большое количество данных, поэтому может возникнуть проблема в виде отсутствия доступа к некоторым данным. Поэтому если данные недоступны или недостаточны, это

может привести к неполноте модели и искажению результатов.

5. *Проблемы с программным обеспечением.* Некорректное функционирование программного обеспечения или ошибки в коде могут привести к неверным результатам моделирования.
6. *Проблемы с валидацией.* Проверка правильности моделирования с использованием цифровых инструментов может вызвать сложности из-за трудностей сравнения результатов с экспериментальными данными или другими методами.

Вывод. В заключение хочется отметить, что искусственный интеллект имеет огромное влияние на моделирование в механике. Благодаря AI становится возможным создавать более точные и эффективные модели, что позволит лучше понимать процессы, происходящие в мире.

Список литературы

1. Гриднева В.А. Лекции по механике сплошной среды : учебное пособие. – Томск., 2004. – 428 с.
2. Логос Аэро-Гидро [Электронный ресурс]. – URL: <https://logos-support.ru/logos/aero-hydro> (дата обращения: 05.06.2024).
3. Transform text and 2D images into 3D assets with generative AI for free [Электронный ресурс] // Alpha 3D. – URL: <https://www.alpha3d.io> (дата обращения: 05.06.2024).

USING DIGITAL TOOLS AND AI TO CREATE 3D MODELS IN HYDRO AND AERODYNAMICS

K.S. Shultais, E.A. Tarasov

Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050

E-mail: karinashultais@yandex.ru

Abstract. This work is devoted to the search and analysis of digital tools suitable for solving problems of fluid and gas mechanics. Approaches for working with digital tools such as writing code, creating 3D models, and using software to perform calculations are considered. The types of artificial intelligence (AI) and tasks that can be solved using AI are also considered. In addition, the problems that arise when using digital tools and AI are considered. Based on the results of this work, digital tools are determined, with the help of which a 3D model of the car will be built and its aerodynamic parameters will be simulated.

Keywords: Digital tools and AI, 3D model, MFG, CFD modeling.

SUMMARY

The collection presents the articles by participants of the All-Russian Youth Scientific Conference "All Aspects of Mathematics and Mechanics, dedicated to the current problems of mathematics and mechanics, as well as to the advanced approaches and methods for solving the fundamental and applied problems.

The book is of interest for the students, graduate students and young scientists.

Издательство "STT" является лидером научного книгоиздания в Сибирском регионе, консультирует по вопросам защиты авторских прав, организации выпуска научной периодики и распространению научных книг и журналов в России и за рубежом. С 2014 года является официальным представителем британского издательства *Red Square Scientific*, специально ориентированного на российских авторов и российское научное содержание. Это облегчает российским ученым публикации за рубежом и делает их работы широко доступными для мирового научного сообщества.

Лучшие книги, выпущенные Издательством "STT", находятся в крупнейших библиотеках мира – National Library of Medicine (USA), The British Library (UK), Library of Congress (USA) и в The US Patent Bureau (USA), что обеспечивает их размещение в мировых базах данных.



Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина 15Б-1

Тел.: (3822) 421-455

E-mail: sttonline@mail.ru

МИР ЖДЕТ ВАШИ КНИГИ!

Содержание

| | |
|---|----|
| Математическое моделирование теплового воздействия на злокачественное новообразование молочной железы <i>Д.В. Акулова, М.А. Шеремет</i> | 4 |
| Численное исследование модификации моделей Стритера–Фелпса, Моно, Доббинса–Дриснека и Кемпа с учетом влияния биофильтров <i>А.В. Амзаракова, М.Д. Михайлов</i> | 11 |
| Численное решение одной коэффициентной обратной задачи с помощью итерационного метода сопряженных градиентов <i>Р.А. Антинов, А.В. Старченко</i> | 18 |
| Моделирование источника излучения с нетривиальной формой фазовой поверхности <i>М.А. Бурнин, О.В. Богданов</i> | 25 |
| Численное решение задачи о воздействии противопожарных разрывов на распространение верхового лесного пожара <i>Е.Н. Голубничий, Д.П. Касымов, В.А. Перминов</i> | 30 |
| Экспериментальное исследование взаимодействия горящих и тлеющих частиц с модельной кроной <i>Е.Н. Голубничий, Д.П. Касымов, В.А. Перминов</i> | 39 |
| Приближенное решение задачи электроимпедансной томографии в круге с неконцентрической вставкой <i>В.Е. Голубцова, А.В. Старченко</i> | 44 |
| Численное решение уравнения теплопроводности с использованием многопроцессорной вычислительной техники <i>А.А. Ерышев, Д.В. Лецинский</i> | 54 |
| Циклическая упорядочиваемость и группы виртуальных узлов <i>М.Э. Иванов</i> | 61 |
| Влияние температуры и скорости деформации на механические свойства дисперсно-упрочнённых материалов <i>Е.А. Иванов, О.И. Данейко, О.В. Матвиенко</i> | 66 |

| | |
|--|-----|
| Прогнозирование трансферной стоимости футболистов с использованием различных регрессионных методов и алгоритмов машинного обучения <i>М.С. Коновалов, Т.В. Емельянова</i> | 76 |
| Параметризация правильных n-угольников <i>А.А. Константинов, Г.Д. Садритдинова</i> | 81 |
| Математические модели течения жидкости в пористой среде <i>М.А. Крайнов</i> | 87 |
| Математическое моделирование теплообмена диоксида азота в закрученном потоке <i>О.В. Матвиенко, П.С. Мартынов</i> | 100 |
| Исследование влияния радиационного воздействия на образцы некоторых видов горючих материалов <i>Т.И. Медведева, Е.Л. Лобода, Д.П. Касымов</i> | 107 |
| Численное исследование распространения тепла в стальном барабане <i>В.Д. Руссо, Е.И. Гурина</i> | 112 |
| Исследование возможности применения технологии LES в модели WRF <i>А.И. Сваровский, А.В. Старченко</i> | 120 |
| Статистическая оценка влияния различных факторов на успеваемость студентов ММФ <i>О.Ю. Серова, Т.В. Емельянова</i> | 127 |
| Численное исследование процесса теплопередачи в однокамерных и двухкамерных стеклопакетах с использованием ANSYS Fluent <i>П.А. Сомова, Е.И. Гурина</i> | 133 |
| Численный расчет температурных характеристик термошкафа с пассивным обогревом в условиях северных регионов <i>И.В. Тренбач, Е.И. Гурина</i> | 142 |
| Исследование установившегося течения дилатантной жидкости сиско в цилиндрической трубе <i>Н.С. Фирсанова, О.В. Матвиенко</i> | 150 |

| | |
|--|-----|
| Использование цифровых инструментов и ИИ для создания 3D моделей в задачах гидро- и аэродинамики <i>К.С. Шультайс, Е.А. Тарасов</i> | 156 |
| SUMMARY | 161 |

Научное издание

ВСЕ ГРАНИ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

сборник статей Всероссийской молодежной научной конференции,
посвященной 85-летию со дня рождения Заслуженного деятеля науки
Российской Федерации, профессора Гришина Анатолия Михайловича

г. Томск, 21–24 мая 2024 г.

Опубликовано в авторской редакции

Верстка, техническое редактирование,
дизайн – С.В. Алексеев, Ю.А. Алексеева

Издательство “СТТ”

Россия, 634028, г. Томск, проспект Ленина, 15/Б–1

Тел.: (3822)421-455

E-mail: sttonline@mail.ru

Scientific & Technical Translations



ИЗДАТЕЛЬСТВО

Усл. печ. лист 8,61. Уч.-изд. л. 5,21.

Бумага SvetoCory. Печать цифровая. Гарнитура Times.

Подписано к печати 5.08.2024 г. Формат 60x84/16.

Тираж 300 экз. Заказ № 712.